

第二章 静电场

Electrostatic field

本章研究的主要问题是：在给定的自由电荷分布以及周围空间介质和导体分布的情况下，如何求解电场。

注意两点：①电荷静止，即： $\vec{v} = 0$

②电场不随时间变化，即： $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$

本章求解静电场的方法有：①分离变量法；②镜像法；③格林函数法。

求解的依据是：唯一性定理。

本章主要内容

静电场的标势及其微分方程

唯一性定理

拉普拉斯方程，分离变量法

镜象法

格林函数法

电多极矩

§ 2.1 静电场的标势及其微分方程

Scalar potential and differential equation for electrostatic field

1.静电场的标势和微分方程

静电现象满足以下两个条件：即 ①电荷静止不动；②场量不随时间变化。故

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量}) = 0$$

把静电条件代入Maxwell's equations中去，即得电场满足的方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases}$$

这两方程连同介质的电磁性质方程 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ 是解决静电问题的基础。

根据电场方程 $\nabla \times \vec{E} = 0$ （即 $\vec{E}$ 的无旋性），可引入一个标势 φ 。

在电磁学中，已知 $\varphi(A) - \varphi(B) = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 因为相距为 $d\vec{l}$ 两点的电势差为

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

由于
$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla \varphi \cdot d\vec{l}$$

所以

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

又因为在均匀各向同性的介质中， $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ 则有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \nabla \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \rho\end{aligned}$$

这里 $\nabla \varepsilon = 0$ ，故有

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon \nabla \cdot (-\nabla \varphi) = \rho$$

即

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

此方程称为泊松方程 (Poisson equation).

若在无源区域内 ($\rho = 0$)，上式化为

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

此方程称为拉普拉斯方程 (Laplace equation)

在各种不同条件下求解Poisson equation或Laplace equation是处理静电问题的基本途径。

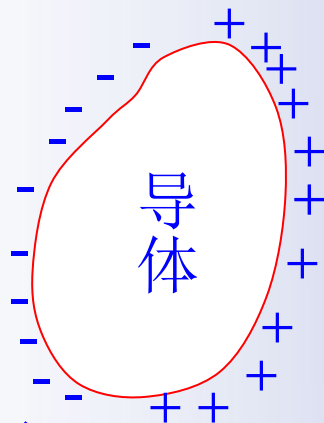
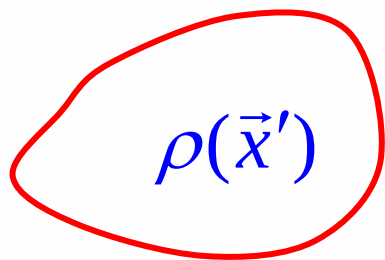
2、静电场的基本问题

如果电荷是连续分布的，则观察点 $\vec{x}$ 处的标势为

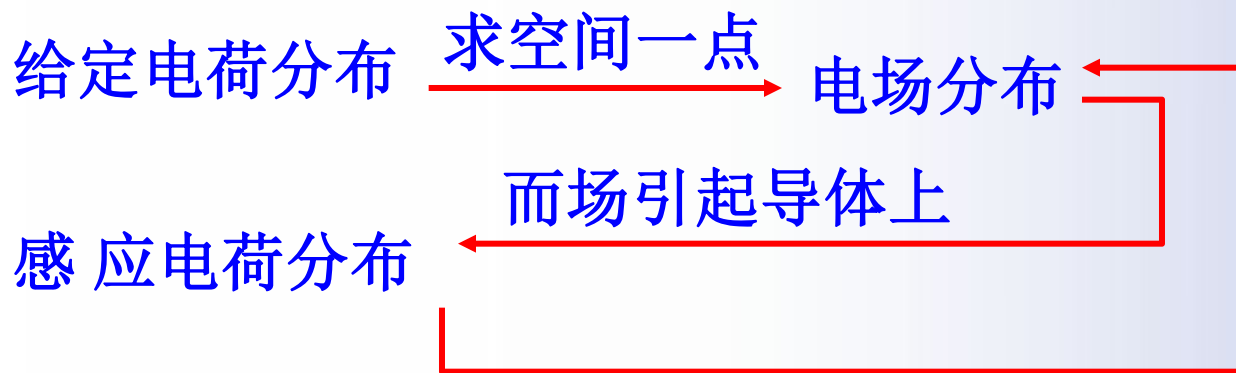
$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

这个式子只反映了电荷激发电场这一面，而没有反映电场对电荷的作用另一面。

如果空间还有导体存在的活，那么物理机制为



考虑到感应情况，诸问题的模拟是：



而感应电荷分布反过来引起

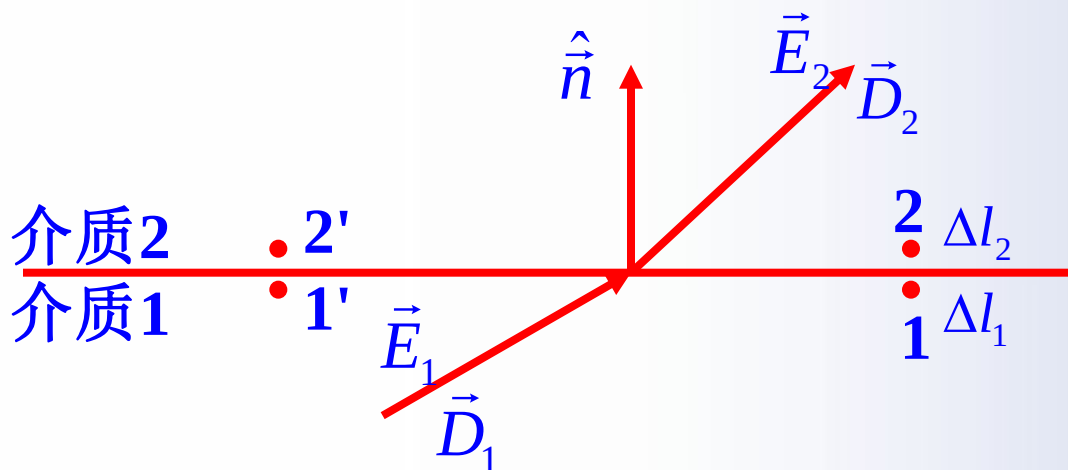
现在，要找出一个电荷对它邻近的电场是怎样作用的，一点上的电场和它邻近的电场又是怎样联

系的，即要找出电荷和电场相互作用规律的微分形式，而在导体表面或其他边界上场和电荷的相互作用关系则由边值关系和边界条件反映出来，称之为边值问题。

(1) 在介质的分界面上，电场满足的边值关系为

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho \end{cases}$$

且为电势所满足的边值关系：



在介质分界面附近取两点1和2，而 $\Delta l_2 \rightarrow 0$ 所以

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 - \varphi_2 &= -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
 &= -(\vec{E}_1 \cdot \hat{n} \Delta l_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n} \Delta l_2) \\
 &= -(E_{1n} \Delta l_1 + E_{2n} \Delta l_2)
 \end{aligned}$$

由于 $\Delta l_1, \Delta l_2 \rightarrow 0$ ，故 $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ，且

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$. 即在界面上,电势 φ 是连续的

注意:

$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$ 可代替 $\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$, 即可代替 $E_{2t} = E_{1t}$

证:

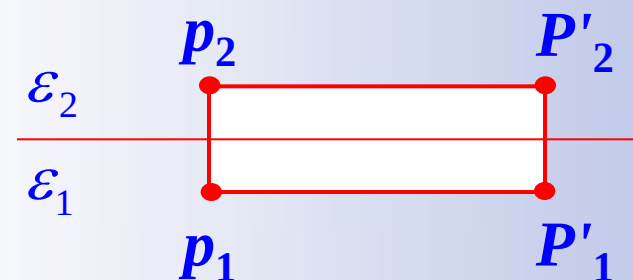
$$\because \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \varphi'_1 - \varphi'_2 = 0$$

可见 $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi'_1 - \varphi'_2$

而 $\varphi_1 - \varphi'_1 = -\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l}$, $\varphi_2 - \varphi'_2 = -\vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l}$

故有 $-\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l} = -\vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l}$

即得 $E_{1t} = E_{2t}$



另外，由方程 $\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$ 可得到：

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1) &= \sigma \\ -\varepsilon_2 \hat{n} \cdot \nabla \varphi_2 + \varepsilon_1 \hat{n} \cdot \nabla \varphi_1 &= \sigma\end{aligned}$$

即

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_S - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_S = -\sigma$$

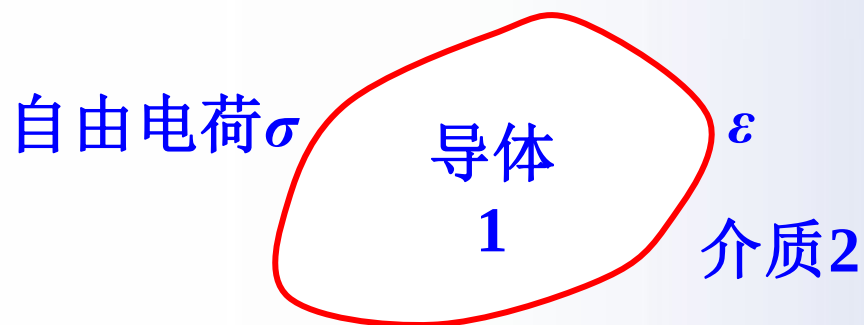
也就是说，在两种不同介质的分界面上，电势 φ 满足的关系为

$$\begin{cases} \varphi_2|_S = \varphi_1|_S \\ \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_S - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_S = -\sigma \end{cases}$$

(2) 在介质与导体的分界面上的情况

由于静电平衡条件，我们知道：

导体内部 $\vec{E}_{\text{内}} = 0$ ；导体表面上的场强与表面
⊥ 导体是等势体；导体内无电荷分布 ($\rho = 0$)，电
荷只分布在导体的表面上 ($\sigma \neq 0$)。



因此，在导体与介质的分界面上； $\varphi_1 = \text{常数}$

$$\therefore \text{导体内部 } \vec{E}_{\text{内}} = 0, \text{ 即 } \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = 0$$

$$\therefore \left. \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S = -\sigma$$

即有

$$\begin{cases} \varphi|_S = \text{常数} \\ \left. \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = -\sigma \end{cases}$$

归纳起来，静电场的基本问题是：

求出在每个区域(均匀)内满足泊松方程，在所有

分界面上满足边值关系和在所研究的整个区域边界上满足边界条件的电势的解。

3、利用静电标势来描述静电场的能量

已知在线性介质中静电场的总能量为

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau$$

在静电情形下，能量 W 可以用电势 φ 和电荷 ρ 表出。

由 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 和 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ 得

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{D} &= -\nabla\varphi \cdot \vec{D} = -\nabla \cdot (\varphi\vec{D}) + \varphi\nabla \cdot \vec{D} \\ &= -\nabla \cdot (\varphi\vec{D}) + \rho\varphi \end{aligned}$$

因此

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho \varphi d\tau - \frac{1}{2} \int_{\infty} \nabla \cdot (\varphi \vec{D}) d\tau$$

即

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \rho \varphi d\tau - \frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

若我们考虑的是体系的总能量，则上式的体积分是对全空间进行的。因此上式右边第二项的面积分是对无穷大的面进行的。有限的电荷体系在无穷远处的电势 $\varphi \sim \frac{1}{r}$ ，电场 $\sim \frac{1}{r^2}$ ，而面积 $\sim r^2$ ，故在 $r \rightarrow \infty$ 时，面积分项的值=0，故有

$$W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varphi \rho d\tau$$

讨论：对 $W = \frac{1}{2} \int_{\infty} \varphi \rho d\tau$ 的使用注意几点：

- (1) 适用于静电场，线性介质；
- (2) 适用于求总能量（如果求某一部分能量时，面积分项 $\frac{1}{2} \oint_S \varphi \vec{D} \cdot d\vec{s} \neq 0$ ）；
- (3) 不能把 $\frac{1}{2} \rho \varphi$ 看成是电场能量密度，它只能表示能量与存在着电荷分布的空间有关。真实的静电

能量是以密度 $w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ 的形式在空间连续分布，场强大的地方能量也大；

(4) $W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho d\tau$ 中的 φ 是由电荷分布 ρ 激发的电势；

(5) 在静电场中，电场决定于电荷分布。在场内没有独立的运动。因而场的能量就由电荷分布所决定。

(6) 若全空间充满了介电常数为 ϵ 的介质，且得到电荷分布 ρ 所激发的电场总能量

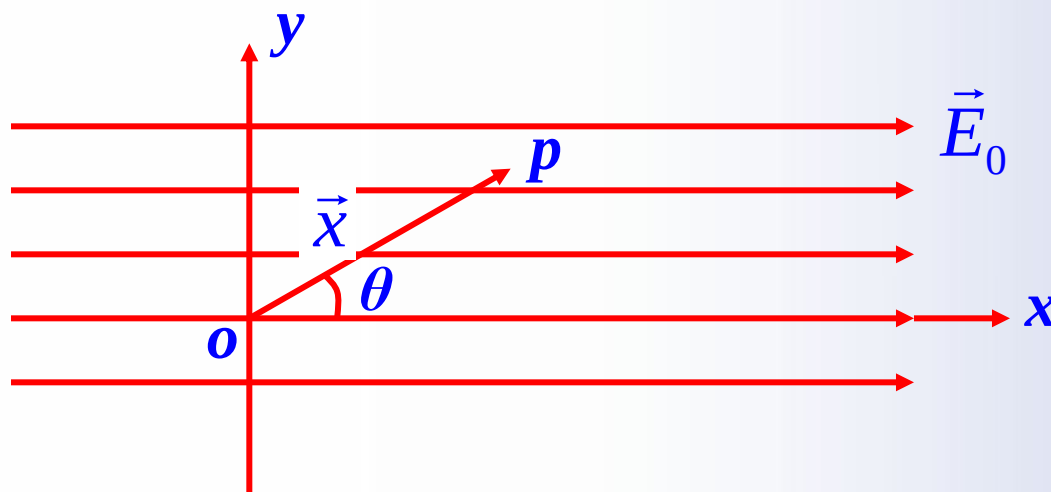
$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int d\tau \int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{r} d\tau'$$

式中 r 为 $\vec{x}$ 与 $\vec{x}'$ 点的距离。

4、举例讨论

[例1]求均匀电场 $\vec{E}_0$ 的电势。

Solution: 因为均匀电场中每一点强度 $\vec{E}_0$ 相同，其电力线为平行直线，选空间任一点为原点，并设原点的电势为 φ_0 。



根据 $\varphi(p_1) - \varphi(p_2) = -\int_{p_2}^{p_1} \vec{E} \cdot d\vec{l}$, 得到

$$\varphi(p) - \varphi(0) = -\int_0^p \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

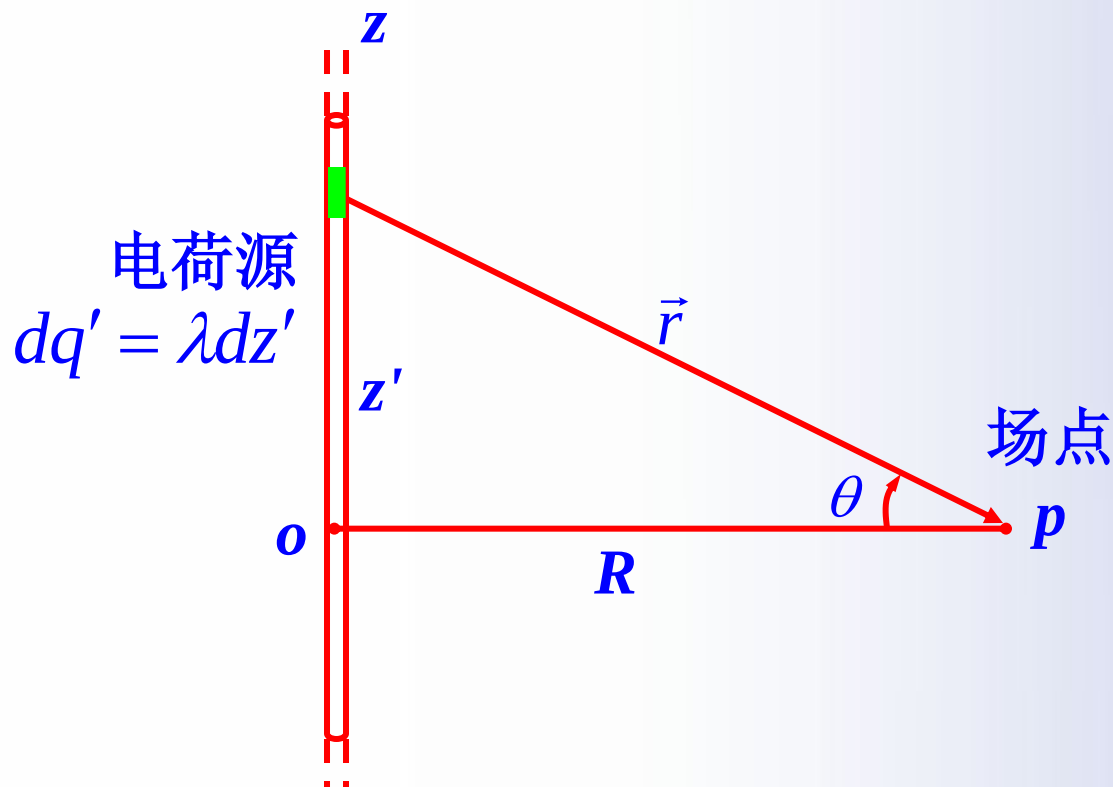
故得到

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \varphi_0 - \int_0^p \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \varphi_0 - \vec{E}_0 \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

这里有个参考点选择问题

[例2]均匀带电的无限长直导线的电荷线密度的 λ , 求空间的电势。

Solution:



选取柱坐标：源点的坐标为 $(0, z')$ ，场点的坐标为 $(R, 0)$ ，考虑到导线是无限长，电场强度显然与 z 无关。

这里，先求场强 $\vec{E}$ ，后求电势 φ 。推导

由于 $\vec{r} = (R-0)\hat{\rho} + (0-z')\hat{z} = R\hat{\rho} - z'\hat{z}$

电荷元为 $dq' = \lambda dz'$ ，因此

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz'}{r^3} \vec{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R\hat{\rho}}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} dz' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'\hat{z}}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} dz'\end{aligned}$$

令 $z' = R \tan \theta$, $dz' = R \sec^2 \theta d\theta$

且

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{R^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{3/2}} \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{R^2 \sec^3 \theta} d\theta \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{R^2 \sec \theta} d\theta \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{R^2} d\theta = \frac{2}{R^2}\end{aligned}$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z' dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \tan \theta}{R^3 \sec^3 \theta} R \sec^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{R} d\theta = 0$$

故

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} R \hat{\rho} \cdot \frac{2}{R^2} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{\rho} \end{aligned}$$

设 p_0 点与导线的垂直距离为 R_0 ，则 p 点到 p_0 点的电势差为

$$\begin{aligned}
 \varphi(R) - \varphi(R_0) &= - \int_{R_0}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
 &= - \int_{R_0}^R \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{\rho} \cdot (\hat{\rho}dR + \hat{\phi}Rd\phi + \hat{z}dz) \\
 &= - \int_{R_0}^R \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} dR \\
 &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R \Big|_{R_0}^R = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_0}
 \end{aligned}$$

若选 p_0 为参考点（即 $\varphi(R_0) = 0$ ），则

$$\varphi(R) = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_0}$$

§ 2.2 唯一性定理

Uniqueness Theorem

本节内容将回答两个问题:

- (1) 要具备什么条件才能求解静电问题
- (2) 所求的解是否唯一

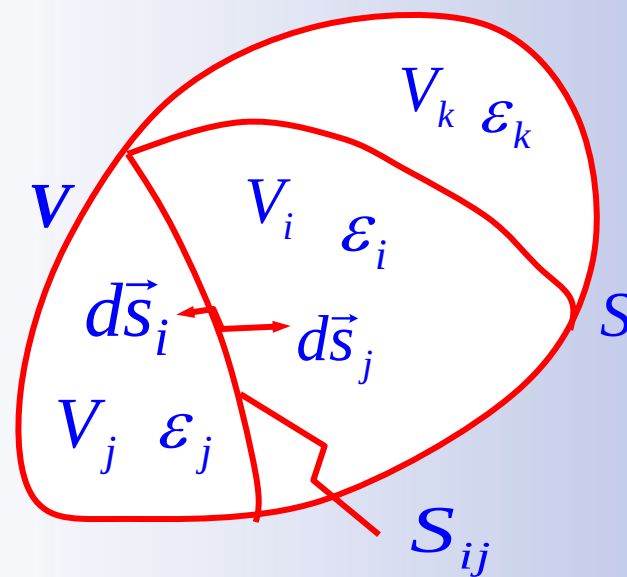
1、静电问题的唯一性定理

(1) 有介质存在的情况

把一个区域 V 找分为许多
小区域 V_i ，每一个小区域内介
电常数为 ϵ_i ，它是各向同性的。

每一个区域给定电荷分布

$$\rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in V$$



已知: { ①在每个均匀区域中满足 $\nabla^2 \varphi_i = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}$, 即有几个区域就是几个泊松方程。
②在各个均匀区域的交界面上, 满足:

$$\varphi_i = \varphi_j, \quad \varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_i = \varepsilon_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_j$$

至此, 不知道边界条件, 即不知道区域的边界S上的一些条件。这个问题正是唯一性定理所要解决的, 下面讨论之。

唯一性定理:

设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$, 在 V 的边界 S 上给定

(i) 电势 $\varphi|_S$

或 (ii) 电势的法向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$, 则 V 内的电场唯一地被确定。

下面采用的证法:

证明：设有两组不同的解 φ' 和 φ'' 满足唯一性定理的条件，只要让得 $\varphi = \varphi' - \varphi'' = \text{常数}$ 即可。

令 $\varphi = \varphi' - \varphi''$

在均匀区域 V_i 内有

$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}, \quad \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon_i}, \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

在两均匀区界面上有

$$\varphi'_i = \varphi'_j, \quad \varphi''_i = \varphi''_j, \quad \rightarrow \quad \varphi_i = \varphi_j$$

$$\varepsilon_i \frac{\partial \varphi'_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi'_j}{\partial n}, \quad \varepsilon_i \frac{\partial \varphi''_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi''_j}{\partial n} \rightarrow \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}$$

在整个区域V的边界S上有

$$\varphi'|_S = \varphi''|_S = \varphi_0 \rightarrow \varphi|_S = \varphi'|_S - \varphi''|_S = 0$$

且

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \varphi''}{\partial n} \Big|_S = 0$$

为了处理边界问题，考虑第*i*个区域*V_i*的界面*S_i*上的积分问题，根据格林定理，对已知的任意两个连续

函数 ψ 和 φ 必有:

$$\int_{V_i} \{ \psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \psi) \} d\tau = \oiint_{S_i} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

令 $\psi = \varepsilon_i \varphi$

且
$$\int_{V_i} \{ \varepsilon_i \varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi) \varepsilon_i (\nabla \varphi) \} d\tau = \oiint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$\therefore \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\therefore \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau = \oiint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s}$$

对所有区域求和得到

$$\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau = \sum_i \oiint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s}$$

进一步分析：在两个均匀区域 V_i 和 V_j 的界面上，由于 φ 和 $\varepsilon \nabla \varphi$ 的法向分量相等，又有 $d\vec{s}_i = -d\vec{s}_j$ ，因此内部分界面的积分为

$$\begin{aligned} \oiint_{S_{ij}} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} &= \oiint_{S_{ij}} \varepsilon_i \varphi_i \nabla \varphi_i \cdot d\vec{s}_i + \oiint_{S_{ji}} \varepsilon_j \varphi_j \nabla \varphi_j \cdot d\vec{s}_j \\ &= \oiint_{S_{ij}} \varepsilon_i \varphi_i \nabla \varphi_i \cdot d\vec{s}_i - \oiint_{S_{ji}} \varepsilon_j \varphi_j \nabla \varphi_j \cdot d\vec{s}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oiint_{S_{ij}} \varphi_i \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds_i - \oiint_{S_{ji}} \varphi_j \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{(这里 } D_{in} = D_{jn}, \varepsilon_i E_{in} = \varepsilon_j E_{jn}, \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \text{)}$$

$$\text{因此 } \sum_i \oiint_{S_i} \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \oiint_S \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} \text{ 故}$$

$$\oiint_S \varepsilon_i \varphi \nabla \varphi \cdot d\vec{s} = \sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau$$

$$\text{而在} S \text{面上, } \varphi|_S = 0, \text{ 或 } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = 0 \text{ 从而有}$$

$$\sum_i \int_i \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau = 0$$

由于 $\varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 \geq 0$ ，而 $\varepsilon_i \neq 0$ ，只有 $\nabla \varphi = 0$ ，要使 $\sum_i \int_{V_i} \varepsilon_i (\nabla \varphi)^2 d\tau$ 成立，唯一地是在 V 内各点上都有

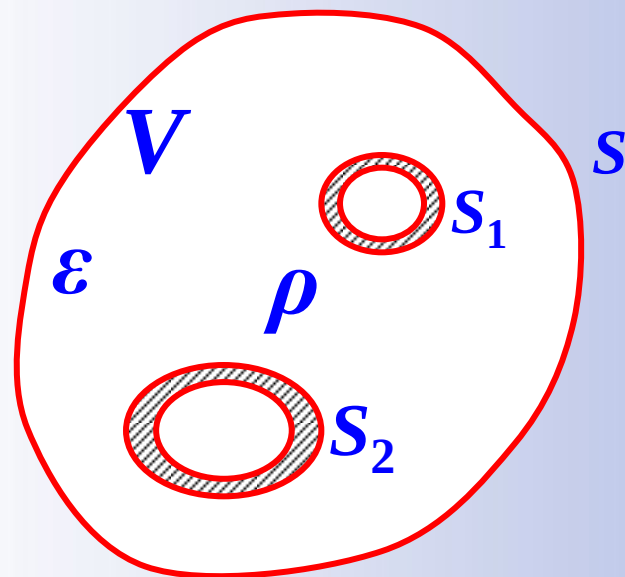
$$\nabla \varphi = 0$$

即在 V 内任一点上， $\varphi = \text{常数}$ 。

由 $\varphi = \varphi' - \varphi''$ 可见， φ' 和 φ'' 至多只能相差一个常数，但电势的附加常数对电场没有影响，这就是说静电场是唯一的。

(2) 有导体存在的情况

讨论区域是导体外空间 V ，即 V 是由导体外表面 S_1 ， S_2 及 S 包面所围成的空间，当 S 在无穷远处时，所讨论的区域就是导体外的全空间 V 。约定：



在无穷远处，电场为零，即在 S 面上 $\varphi = 0$ 或者表示成 $\varphi|_{S_\infty} = 0$

在此基础上，把问题分为两类：

A类问题：已知区域 V 中电荷分布 $\rho(\vec{x})$ ，及所有导体的形状和排列；每个导体的电势都给定。

B类问题：已知区域 V 中电荷分布 $\rho(\vec{x})$ ，及所有导体的形状和排列；每个导体的总电荷都给定。

因为导体面就是边界面，因此上述导体的电势或者总电荷就是边界条件。

先用反证法证A类问题。 **推导**

证明： 设存在着两个解 φ' 和 φ'' ，这意味着在区域 V 内， φ' 和 φ'' 都满足泊松方程：

$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

第 i 个导体的表面为 S_i 面上, 该导体的电势为 φ_i 。
那么, 在 S_i 面上, φ 和 φ' 都必须等于 φ_i 。即

$$\varphi'|_{S_i} = \varphi_i \quad \varphi''|_{S_i} = \varphi_i$$

在 S_∞ 面上, $\varphi' = \varphi'' = 0$

令 $\varphi = \varphi' - \varphi''$ 则有

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \varphi' - \nabla^2 \varphi'' = 0 \\ \varphi|_{S_i} = \varphi'|_{S_i} - \varphi''|_{S_i} = \varphi_i - \varphi_i = 0 \end{cases}$$

应用格林定理:
$$\int_V \{ \psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)(\nabla \psi) \} d\tau = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

令 $\psi = \varphi$, 有

$$\int_V \{ \varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2 \} d\tau = \oiint_{S_\infty} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \sum_i \oiint_{S_i} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$\therefore \nabla^2 \varphi = 0, \quad \varphi|_{S_\infty} = 0, \text{ 及 } \varphi|_{S_i} = 0$$

$$\therefore \int_V (\nabla \varphi)^2 d\tau = 0$$

式中被积函数 $(\nabla \varphi)^2 \geq 0$, 要使上式成立, 必然在 V 中每一点上有

$$\nabla \varphi = 0$$

于是, V 中每一点上, $\varphi = \text{常数}$ 。

但在导体表面上, $\varphi = 0$, 即得到常数=0, 即

$$\varphi = \varphi' - \varphi'' = 0, \text{ 使得 } \varphi' = \varphi''$$

这就说明了对A类问题 φ 有唯一解。

再用反证法证B类问题

也设存在两个解 φ' 和 φ'' , 则有

$$\nabla^2 \varphi = 0, (\varphi = \varphi' - \varphi'')$$

令 $\psi = \varphi$ 代入格林公式中, 得

$$\int_V \{ \varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2 \} d\tau = \oiint_{S_\infty} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \sum_i \oiint_{S_i} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

$$\therefore \nabla^2 \varphi = 0, \quad \varphi|_{S_\infty} = 0, \text{ 即得}$$

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 d\tau = \sum_i \oiint_{S_i} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

因为在导体表面 S_i 处，电势并没有给定，但根据电磁学中的知识，导体在静电平衡时为一等势体。虽然 $\varphi'|_{S_i}$ 与 $\varphi''|_{S_i}$ 不一定相等，但对同一导体而言，故可从积分号内提出来，于是

$$\varphi'|_{S_i} - \varphi''|_{S_i} = \varphi_i \quad (\text{应为一确定值})$$

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 d\tau = \sum_i \varphi_i \oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

现在分析:

$$\oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = ?$$

因为 $\oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$ 中, S_i 表示电场中第 i 个导体的表面, 导体在静电平衡时, 在导体外, 紧靠导体表面处的场强方向与导体表面垂直, 场强的大小与导体表面对应点的面电荷密度成正比, 即

$$E_n = \sigma / \varepsilon, \quad \text{而} \quad E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

从而得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \frac{\partial \varphi''}{\partial n} = -\frac{\sigma'}{\varepsilon} - \left(-\frac{\sigma''}{\varepsilon}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(\sigma'' - \sigma') \end{aligned}$$

这样就有

$$\oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{\varepsilon} \left[\oiint_{S_i} \sigma'' ds - \oiint_{S_i} \sigma' ds \right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} (Q'' - Q')$$

式中 Q'' 和 Q' 都表示第 i 个导体所带的总电荷，又因为它是给定的，即

$$Q'' = Q'$$

故

$$\oiint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

对每一个导体表面都有此结论。因此得到

$$\int_V (\nabla \varphi)^2 d\tau = 0$$

同理, $(\nabla \varphi)^2 \geq 0$, 要使上式成立, 必然是

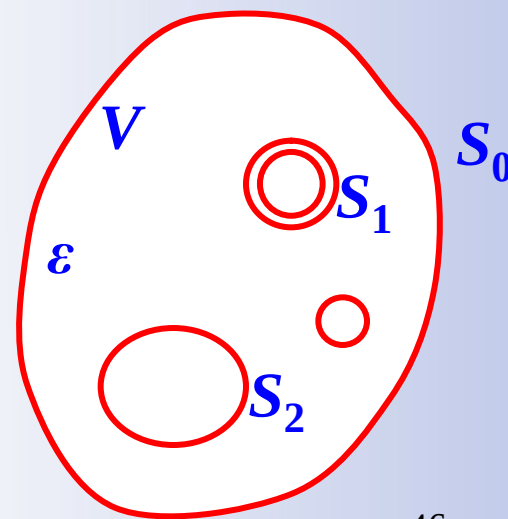
$$\nabla \varphi = 0$$

即 $\varphi = \varphi' - \varphi'' = \text{常数}$

由于 $\vec{E} = -\nabla \varphi$, 此常数对电场无影响, 所以此时仍说 φ 是唯一的。

唯一性定理 (另外一种证明方法)

区域 V 由封闭面 $S_0, S_1, S_2, \dots$ 等所包围, 其中 S_0 是最外包围面。如果 V 内的电荷密度 ρ 分布已知, 并且各边界面满足下列条件之一时:



(i) S_i 面上电势 已知;

(ii) S_j 面上为等势面。 $\varphi_j = c_x =$ 未知常数, 并且 S_j

面上流出的电通量已知。 $N_j = \oiint_{S_j} -\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds_j =$ 已知

(iii) S_k 面上的电场法线分量 E_n 已知。 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{S_k} =$ 已知

则区域 V 内电场强度被唯一确定。

用反证法证明。

练习

证明: 设有两上电势 φ' 和 φ'' , 它们都满足场方程

跳过
$$\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

并满足上述边界条件，则 $\vec{E}' = \vec{E}''$ ，或者 $\nabla\varphi' = \nabla\varphi''$ ， φ' 和 φ'' 不必相等，可以相差一个常数，即

$$\varphi' - \varphi'' = \text{const}$$

要证明场中每一点 $\nabla\varphi' = \nabla\varphi''$ 成立，只需证明

$$\int_V [\nabla(\nabla\varphi' = \nabla\varphi'')]^2 d\tau = 0$$

这里因为 $[\nabla(\varphi' - \varphi'')]^2 \geq 0$ ，并 $d\tau \neq 0$ 。要使其等于0，则必须 $\nabla\varphi' = \nabla\varphi''$ 。而

$$\int_V [\nabla(\varphi' - \varphi'')]^2 d\tau = \int_V [\nabla(\varphi' - \varphi'')][\nabla(\varphi' - \varphi'')] d\tau$$

由矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = \nabla\varphi \cdot \vec{f} + \varphi \nabla \cdot \vec{f}$$

则有

$$\int_V [\nabla(\varphi' - \varphi'')][\nabla(\varphi' - \varphi'')] d\tau = \int_V \nabla \cdot [(\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'')] d\tau \\ - \int_V (\varphi' - \varphi'') \nabla^2 (\varphi' - \varphi'') d\tau$$

其中因为 $\nabla^2 \varphi' = -\frac{\rho}{\varepsilon}$, $\nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ 所以 $\nabla^2 (\varphi' - \varphi'') = 0$
即

$$\int_V [\nabla(\varphi' - \varphi'')][\nabla(\varphi' - \varphi'')] d\tau = \int_V \nabla \cdot [(\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'')] d\tau$$

也就是

$$\int_V [\nabla(\varphi' - \varphi'')]^2 d\tau = \sum_i \oiint_{S_i} (\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'') \cdot d\vec{S}_i$$

现在考察上式右边的面积分之值。

a) 设 S_i 面满足(i)类边界条件, 则 $(\varphi' - \varphi'')|_{S_i} = 0$
故 S_i 面积分为零。

b) 设 S_j 面满足(ii)类边界条件, 由于 $\varphi'|_{S_j} = c_{x1}$,
 $\varphi''|_{S_j} = c_{x2}$, 故 $(\varphi' - \varphi'')|_{S_j} = c_{x1} - c_{x2} = \text{未知数}$
故可以将 $(\varphi' - \varphi'')$ 从积分号内提出来, 则有

$$\begin{aligned} \oiint_{S_j} (\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'') \cdot d\vec{s}_j &= (\varphi' - \varphi'')|_{S_j} \oiint_{S_j} \nabla(\varphi' - \varphi'') \cdot d\vec{s}_j \\ &= -(\varphi' - \varphi'')|_{S_j} \oiint_{S_j} (E'_n - E''_n) \cdot d\vec{s}_j \end{aligned}$$

由于(ii)类边界条件中还包括有给定总通量值,
即

$$\oiint_{S_j} E'_n d\vec{s}_j = \oiint_{S_j} E''_n d\vec{s}_j$$

从而使得

$$\oiint_{S_j} (\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'') \cdot d\vec{s}_j = 0$$

c) 设 S_k 面满足(iii)类边界条件, 则

$$\oiint_{S_k} (\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'') \cdot d\vec{s}_k = - \oiint_{S_k} (\varphi' - \varphi'') \nabla(E' - E'') \cdot d\vec{s}_k$$

由于在 S_k 面上 E_n 值给定, 故 $(E'_n - E''_n)|_{S_k} = 0$ 则

$$\oiint_{S_k} (\varphi' - \varphi'') \nabla(\varphi' - \varphi'') \cdot d\vec{s}_k = 0$$

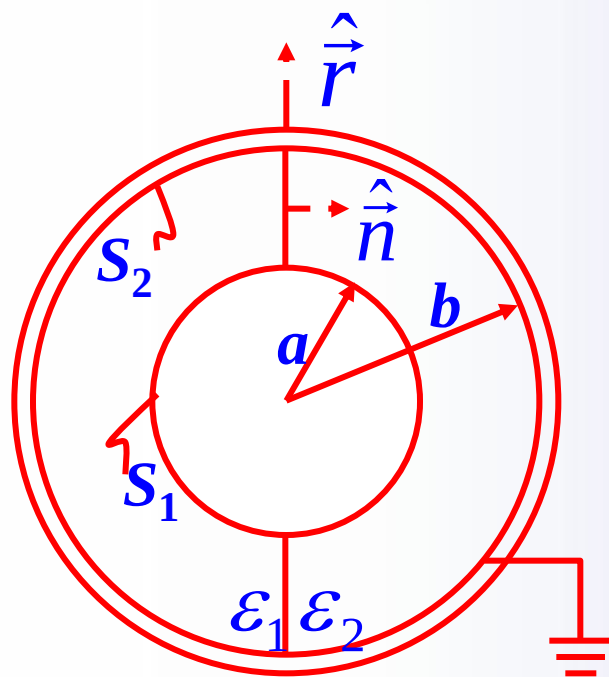
由此可见，满足场方程组和边界条件的 φ' 和 φ'' 必须满足等式

$$\int_V [\nabla(\varphi' - \varphi'')]^2 d\tau = 0$$

即 $\vec{E}' = \vec{E}''$ ，唯一性定理证毕。

2、用唯一性定理解决实际问题

[例]两同心导体球壳之间充以两种介质，左半球介电常数为 ε_1 ，右半球介电常数为 ε_2 。设内球壳半径为 a ，带电荷为 Q ，外球壳接地，半径为 b ，求电场和球壳上的电荷分布。



Solution :

以唯一性定理为依据来解本题。

a)写出本题中电势 φ 应满足的方程和边值关系以及边界条件

此区域 V 为导体球与球壳之间的空间，边界面有两个，即 S_1 和 S_2 ， S_1 是导体球表面， S_2 是导体球壳内表面，边界条件为：在 S_1 上总电量是 Q ，在 S_2 上 $\varphi = 0$ 。

在两种介质中，电势都满足Laplace方程，在介质交界面上，电势 φ 连续，电位移矢量的法向分量连续（因为交界面上 $\sigma_f = 0$ ）。

φ 应满足的定解条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \\ \text{在交界面上} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{array} \right. \\ \text{在 } S_1 \text{ 面上, 已知 } Q \\ \text{在 } S_2 \text{ 面上, 已知 } \varphi = 0 \end{array} \right.$$

现在不论用什么方法, 只要求出的点函数 $\varphi(\vec{x})$ 能满足上述条件, 那么 $\varphi(\vec{x})$ 就是本题的唯一解。

b) 根据已知的定解条件, 找出电势 φ 的解

由于对称性, 选取球坐标, 原点在球心, 直接积分

可求得解，因为

$$\nabla^2 \varphi_i = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}) = 0$$

不难看出：

$$\varphi_1 = \frac{A}{r} + B \quad (\text{左半球 } \varepsilon_1 \text{ 中电势})$$

$$\varphi_2 = \frac{C}{r} + D \quad (\text{右半球 } \varepsilon_2 \text{ 中电势})$$

在 $r=b$ 处：

$$\varphi_1|_{r=b} = \frac{A}{b} + B = 0$$

$$\therefore B = -\frac{A}{b}$$

从而得到

$$\varphi_1 = A\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

同理，在 $r=b$ 处：

$$\varphi_2|_{r=b} = \frac{C}{b} + D = 0$$

$$\therefore D = -\frac{C}{b}$$

即得

$$\varphi_2 = C\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

在两介质的交界面上：

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

由此得到

$$A = C$$

又因为在两介质的交界面上， $\hat{n}$ 与 $\hat{r} \perp$ ，但 φ_1, φ_2 都只与 r 有关，所以

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0$$

这样， φ_1, φ_2 也满足了 D_n 连续的条件。

到此为止，在条件中，除了在 S_1 面上总电量为 Q 外， φ 也满足了其它全部条件，而 φ 也只剩下一个待定常数 A 。现在用 φ 必须满足在 S_1 面上总电量等于 Q 这个条件来确定 A ，即

$$\oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\therefore \quad \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = -\varepsilon_1 \nabla \varphi_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \hat{\vec{e}}_r = \frac{A\varepsilon_1}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = -\varepsilon_2 \nabla \varphi_2 = -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \hat{\vec{e}}_r = \frac{A\varepsilon_2}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{s} &= \iint_{S_{1\text{左}}} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \iint_{S_{1\text{右}}} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{A\varepsilon_1}{a^2} \iint_{S_{1\text{左}}} \vec{e}_r \cdot d\vec{s} + \frac{A\varepsilon_2}{a^2} \iint_{S_{1\text{右}}} \vec{e}_r \cdot d\vec{s} \\ &= \frac{A\varepsilon_1}{a^2} \cdot 2\pi a^2 + \frac{A\varepsilon_2}{a^2} \cdot 2\pi a^2 \\ &= Q \end{aligned}$$

故

$$A = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

从而得到:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \\ \varphi_2 = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) \end{cases}$$

c) 电场和电荷分布情况

根据电势 φ_i 所得到的结果, 有

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} \\ \vec{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} \end{cases}$$

相应地，有

$$\begin{cases} \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} \\ \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q\vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3} \end{cases}$$

由此可见

$$|\vec{D}_1| \neq |\vec{D}_2|$$

▲在导体球 ($r=a$) 表面上:

$$\begin{cases} \sigma_{1f} = \hat{n} \cdot \vec{D}_1 \Big|_{r=a} = D_{1r} \Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ \sigma_{2f} = \hat{n} \cdot \vec{D}_2 \Big|_{r=a} = D_{2r} \Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{cases}$$

可见 $\sigma_{1f} \neq \sigma_{2f}$

▲在导体球壳内 ($r=b$) 处:

$$\begin{cases} \sigma_{1\text{壳}f} = \hat{n} \cdot \vec{D}_1 \Big|_{r=b} = -D_{1r} \Big|_{r=b} = -\frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi b^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ \sigma_{2\text{壳}f} = \hat{n} \cdot \vec{D}_2 \Big|_{r=b} = -D_{2r} \Big|_{r=b} = -\frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi b^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{cases}$$

也可看出： $|\sigma_{1\text{壳}f}| \neq |\sigma_{2\text{壳}f}|$

▲还可进一步求出束缚电荷（极化电荷）分布：

已知 $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$

所以
$$\begin{cases} \vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \varepsilon_0 \vec{E}_1 = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^3} \\ \vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \vec{r}}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^3} \end{cases}$$

而极化电荷体密度:

$$\begin{cases} \rho_{1p} = -\nabla \cdot \vec{P}_1 = -\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_{1r}) \right] = 0 \\ \rho_{2p} = -\nabla \cdot \vec{P}_2 = -\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_{2r}) \right] = 0 \end{cases}$$

即在两种介质中, 极化电荷体密度都为零。

▲在导体球表面上极化电荷面密度分布:

$$\begin{cases} \sigma_{1p} = -\hat{\vec{n}} \cdot \vec{P}_1 \Big|_{r=a} = -P_{1r} \Big|_{r=a} = -\frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ \sigma_{2p} = -\hat{\vec{n}} \cdot \vec{P}_2 \Big|_{r=a} = -P_{2r} \Big|_{r=a} = -\frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{cases}$$

▲故得到导体球表面上的总电荷 分布:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{1f} + \sigma_{1p} = \frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ \sigma_2 = \sigma_{2f} + \sigma_{2p} = \frac{\varepsilon_0 Q}{2\pi a^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \end{cases}$$

可见

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

▲在两种介质交界面处:

因为 $\hat{n} \perp \vec{r}$ 。 因而 $P_n = 0$, 所以 $\sigma_p = 0$

注意:

在前面计算过程中, 难得出导体球面上 $\sigma_i = \sigma_{if} + \sigma_{ip}$

是常数，但是 σ_{if} 或 σ_{ip} 在每个半球面上虽然都是常数，但 $\sigma_{1f} \neq \sigma_{2f}$ ， $\sigma_{1p} \neq \sigma_{2p}$ ，即 σ_f 在球面上不是均匀分布的。现在来说明 σ_f 不能均匀分布的原因。

假定 σ_f 是均匀分布的，那么由

$$\begin{aligned}\sigma_p &= -\hat{n} \cdot \vec{P} = -\hat{n} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = -\hat{n} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \vec{D} \\ &= -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \sigma_f\end{aligned}$$

可见， σ_p 在两个半球面上，因 ε 值不同而不同。

导体球内的静电场由 σ_f 和 σ_p 共同激发，由于 σ_f 均匀分布，所以 σ_f 在球内的电场为零。但 σ_p 由于非

均匀分布必将导致它在球内的场不为零，这样导体球就不能达到静电平衡。由此可见，要使导体球达到静电平衡， σ_f 的分布必须是非均匀的。

§ 2.3 拉普拉斯方程, 分离变量法

Laplace's equation,
method of separate variation

本节内容主要是研讨Poisson 方程的求解解析方法。

电场是带电导体所决定的。自由电荷只能分布在导体的表面上。因此，在没有电荷分布的区域V里，Poisson's equation 就转化为 Laplace's equation，即

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$



$$\rho = 0$$

产生这个电场的电荷都是分布于区域V的边界上，它

们的作用通过边界条件反映出来:

① 给定 $\varphi|_s$

② 给定 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 或导体总电量 $-\varepsilon \oiint_s \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = Q$

所以, 讨论的问题归结为:

① 怎样求解 (通解) Laplace's equation.

② 怎样利用边界条件及边值关系求出积分常数。

Laplace's equation 可以用分离变量法求通解, 其求解条件是:

① 方程是齐次的。

② 边界应该是简单的几何面。

(能用分离变量法条件: 求区无电荷, 边界规则)

一、分离变量法求Laplace's equation的通解

(1) 在直角坐标系中

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

设 $\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

在数学物理方法中，该方程的通解的

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x) \\ & \cdot (B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \\ & \cdot (C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z) \end{aligned}$$

(A、B、C为待定系数)

或者写成

$$\varphi(x, y, z) = e^{\pm i k_x x} e^{\pm i k_y y} e^{\pm i k_z z};$$

(2) 在柱坐标系中

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

设 $\varphi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$

该方程的通解为

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z) = & \left[A_1 J_m(kr) + A_2 N_m(kr) \right] \\ & \cdot \left[B_1 \cos(n\theta) + B_2 \sin(n\theta) \right] \\ & \cdot \left[C_1 \cosh(kz) + C_2 \sinh(kz) \right] \end{aligned}$$

其中, J_m 为 m 阶第一类贝塞尔函数, N_m 为 m 阶第二类贝塞尔函数。

$$J_m(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{kr}{2}\right)^{m+2n}}{n! \Gamma(m+n+1)} \quad (\Gamma \text{ 为伽马函数})$$

$$N_m(kr) = \frac{\cos(m\pi)J_m(kr) - J_{-m}(kr)}{\sin(m\pi)}$$

如果考虑与 z 轴无关 ($k=0$) 情况, 并讨论的区域是 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 故通解为

$$\varphi(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin(n\theta)$$

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} (A_0 + B_0 \ln r)(C_0 + D_0 \theta) & m = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) & m \neq 0 \end{cases}$$

这里 A, B, C, D 为待定系数。

(3) 在球坐标系中

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0\end{aligned}$$

设 $\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$

其通解为

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta, \phi) = & \sum_{n,m} \left(A_{nm} r^n + \frac{B_{nm}}{r^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \\ & + \sum_{n,m} \left(C_{nm} r^n + \frac{D_{nm}}{r^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) \sin(m\phi)\end{aligned}$$

这里 $P_n^m(\cos \theta)$ 为缔合勒让德 (Legendre) 函数

对于具有轴对称的问题, $m=0$ (取此轴为极轴)

且

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

这里 $P_n(\cos \theta)$ 为勒让德函数, A_n 、 B_n 为待定系数

对于球对称的问题, $m=0$, $n=0$ 。且

$$\varphi(r) = A + \frac{B}{r} \quad A, B \text{ 为待定系数}$$

2、利用边界条件定解

说明两点:

第一，如果考虑问题中有*i*个区域（均匀分布），必须有*i*个相应的Laplace's equation.

第二，在每个区域的交界面上，应该满足边值关系：

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_j \\ \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \end{cases} \quad (\text{在} S_{ij} \text{面上})$$

边界条件：

$$\varphi|_s \text{ 或 } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s \text{ 及导体的总电荷 } -\varepsilon \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = Q$$

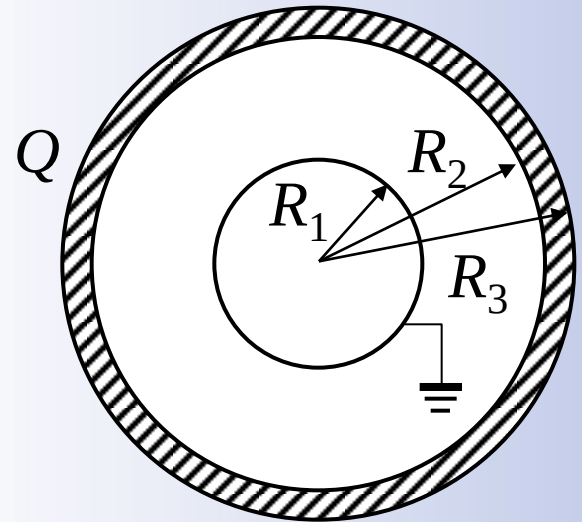
3、举例说明定特解的方法

[例1] 一个内径和外径分别为 R_2 和 R_3 的导体球壳，带电荷为 Q 。同心地包围着一个半径为 R_1 的导体球（ $R_1 < R_2$ ），使半径 R_1 的导体球接地，求空间各点的电势和这个导体球的感应电荷。

Solution:

第一步：分析题意，找出
定解条件

根据题意，具有球对称性，
电势不依赖于极角 θ 和方位角 ϕ ，只与半径 r 有关。



即

$$\varphi(r, \theta, \phi) \rightarrow \varphi(r)$$

故定解条件为:

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0. \quad r > R_3 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0. \quad R_1 < r < R_2 \quad (2)$$

边界条件:

(i) 因为导体球接地, 有

$$\varphi_2|_{r=R_1} = \varphi_1|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (3)$$

(ii) 因整个导体球壳为等势体, 有

$$\varphi_2|_{r=R_2} = \varphi_1|_{r \rightarrow R_3} \quad (4)$$

(iii)球壳带电量为 Q ，根据Gauss theorem

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

得到

$$-\iint_{r=R_3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} r^2 d\Omega + \iint_{r=R_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} r^2 d\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

第二步，根据定解条件确定通解和待定常数

由方程式(1)、(2)可看出，电势不依赖于 φ ，取 $n=0$ ；不依赖于 θ ，取 $P_n(\cos \theta)=1$ 故得到导体球壳内、外空间的电势：

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = A + \frac{B}{r} \quad r > R_3 \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = C + \frac{D}{r} \quad R_1 < r < R_2 \end{array} \right. \quad (7)$$

由 (3) 式得

$$\text{当 } r \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 = 0. \quad \therefore A = 0 \quad (8)$$

$$\text{当 } r = R_1, \quad \varphi_2 = 0. \quad \therefore C = -\frac{D}{R_1} \quad (9)$$

从而得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{B}{r} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = D\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right) \end{array} \right. \quad (11)$$

由（4）式得

$$\frac{B}{R_3} = D\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \quad (12)$$

由（5）式得

$$B \cdot 4\pi - D \cdot 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

即

$$B - D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \quad (13)$$

将（13）式代入（12）式，即得

$$D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \bigg/ \left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

令

$$Q_1 = - \frac{Q}{R_3 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)}$$

因此得到:

$$A = 0, \quad B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$C = - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad D = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}$$

将 A 、 B 、 C 、 D 系数代入到 (6)、(7) 式, 即得电势的解:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{B}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R_3) \\ \varphi_2 = C + \frac{D}{r} = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} & (R_1 < r < R_2) \end{cases}$$

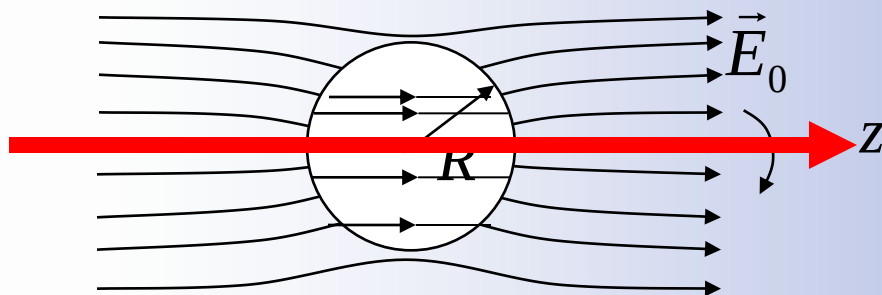
导体球上的感应电荷为

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \iint_{r=R_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} r^2 d\Omega &= -\epsilon_0 \iint_{r=R_1} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) \right] r^2 d\Omega \\ &= -\epsilon_0 \iint_{r=R_1} \left[-\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega \right] \\ &= Q_1 \end{aligned}$$

[例2]介电常数为 ϵ 的均匀介质球，半径为 R ，被置于均匀外场 $\vec{E}_0$ 中，球外为真空。求电势分布。

Solution:

第一步：根据题意，



找出定解条件

由于这个问题具有轴对称性，取极轴 z 沿外电 $\vec{E}_0$ 场方向，介质球的存在使空间分为两个均匀区域——球内、球外。两区域内都没有自由电荷。因此电势 φ 满足Laplace's equation。以 φ_1 代表球外区域的电势， φ_2 代表球内区域的电势，故

$$(r \geq R) \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_1 = 0 \\ \varphi_1|_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta) \\ \varphi_1|_{r \rightarrow R} = \varphi_2|_{r \rightarrow R} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=R} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

$$(r \leq R) \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_2 = 0 \\ \varphi_2|_{r \rightarrow 0} = \text{有限值} \\ \varphi_2|_{r=R} = \varphi_1|_{r=R} \\ \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_{r=R} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \end{array}$$

第二步：根据定解条件确定通解和待定常数

由于问题具有轴对称性，即 φ_i 与 ϕ 无关，故

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \sum_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \quad (r \geq R) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = \sum_n (c_n r^n + \frac{d_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \quad (r \leq R) \end{array} \right. \quad (10)$$

由（2）式得

$$\varphi_1|_{r \rightarrow \infty} = \left[\sum_n (a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \right]_{r \rightarrow \infty} = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

比较两边系数，得

$$a_1 = -E_0 \quad a_n = 0. \quad (n \neq 1)$$

由 (6) 式得

$$\varphi_2|_{r \rightarrow 0} = \left[\sum_n (c_n r^n + d_n \frac{1}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \right]_{r \rightarrow 0} = \text{有限值}$$

从中可见

$$d_n = 0$$

故有：

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_n b_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \varphi_2 = \sum_n c_n r^n P_n(\cos \theta) \end{cases} \quad (12)$$

再由 (3)、(4) 式或者 (7)、(8) 式得到:

$$\begin{cases} -E_0 R P_1(\cos \theta) + \sum_n b_n \frac{1}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_n c_n R^n P_n(\cos \theta) \\ -E_0 P_1(\cos \theta) - \sum_n (n+1) b_n \frac{1}{R^{n+2}} P_n(\cos \theta) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_n c_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) \end{cases}$$

比较 $P_n(\cos \theta)$ 的系数, 得

$$\left. \begin{aligned} -E_0 R + \frac{b_1}{R^2} &= c_1 R \\ -E_0 - \frac{2b_1}{R^3} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} c_1 \end{aligned} \right\} \quad n=1 \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} -E_0 R + \frac{b_1}{R^2} &= c_1 R \\ -E_0 - \frac{2b_1}{R^3} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} c_1 \end{aligned} \right\} \quad n=1 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_n}{R^{n+1}} &= c_n R^n \\ -(n+1) \frac{b_n}{R^{n+2}} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} n c_n R^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad n \neq 1 \quad \begin{aligned} (15) \\ (16) \end{aligned}$$

由 (15) 、 (16) 式给出:

$$b_n = 0, \quad c_n = 0. \quad (n \neq 1) \quad (17)$$

由 (13) 、 (14) 式给出

$$b_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 R^3 \quad (18)$$

$$c_1 = \frac{-3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 \quad (19)$$

由此得到电势为

$$\begin{cases} \varphi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} R^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta & (r \geq R) \\ \varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 r \cos \theta & (r \leq R) \end{cases}$$

▲相应地，球内、外的电场强度为

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -\nabla \varphi_1 \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right) \left(-E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} R^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta \right) \\ &= E_0 (\cos \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} R^3 E_0 \cos \theta \frac{2}{r^3} \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$+ \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} R^3 E_0 \sin \theta \frac{1}{r^3} \vec{e}_\theta$$

其中

$$(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) = \vec{e}_z$$

第二项和第三项之和实际上是一个等效的放在原点的偶极子在球外产生的电场，其电偶极矩为

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} R^3 \vec{E}_0$$

因此，球外区域的电场为：

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}' \quad \text{而}$$

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$$

同理得到

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= -\nabla \varphi_2 \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right) \left(-\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 r \cos \theta \right) \\ &= \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) \\ &= \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} E_0 \vec{e}_z \\ &= \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon} \vec{E}_0 \end{aligned}$$

由此可见，球内的场是一个与球外场平行的恒定场。而且球内电场比原外场 $\vec{E}_0$ 为弱，这是极化电荷造成的。

▲在球内总电场作用下，介质球的极化强度的

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 3\varepsilon_0 \vec{E}_0$$

▲介质球的总电偶极矩为

$$\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon} 4\pi \varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0$$

§ 2.4 镜象法

Method of Images

根据前面的内容讨论知道：在所考虑的区域没有自由电荷分布时，可用Laplace's equation求解场分布；在所考虑的区域内有自由电荷分布时，且用Poisson's equation 求解场分布。

如果在所考虑的区域只有一个或者几个点电荷，区域边界是导体或介质界面，这类问题又如何求解？这就是本节主要研究的一个问题。解决这类问题的一种特殊方法——称为镜象法。

1、镜象法的基本问题

在点电荷附近有导体或介质存在时，空间的静电场是由点电荷和导体的感应电荷或介质的束缚电荷共同产生的。

那么，导体的感应电荷或介质的极化电荷对场点而言能否用场空间以外的区域（导体或介质内部）某个或几个假想的电荷来代替呢？

2、镜象法的理论基础

镜象法的理论基础是唯一性定理。

这里要注意几点：

a) 象电荷必须放在研究的场域外

b) 放置象电荷后，就认为原来的真实的导体或介质界面不存在，把整个空间看成是无界的均匀空间。并且其介电常数应是所研究场域的介电常数。

c) 象电荷是虚构的，它只有等效作用。而其电量并不一定与真实的感应电荷或极化电荷相等。

d) 镜象法所适应的范围是：①场区域的电荷是点电荷，无限长带电直线；②导体或介质的边界面必是简单的规则的几何面（球面、柱面、平面）。

3、镜象法的具体应用

用镜象法解题大致可按以下步骤进行：

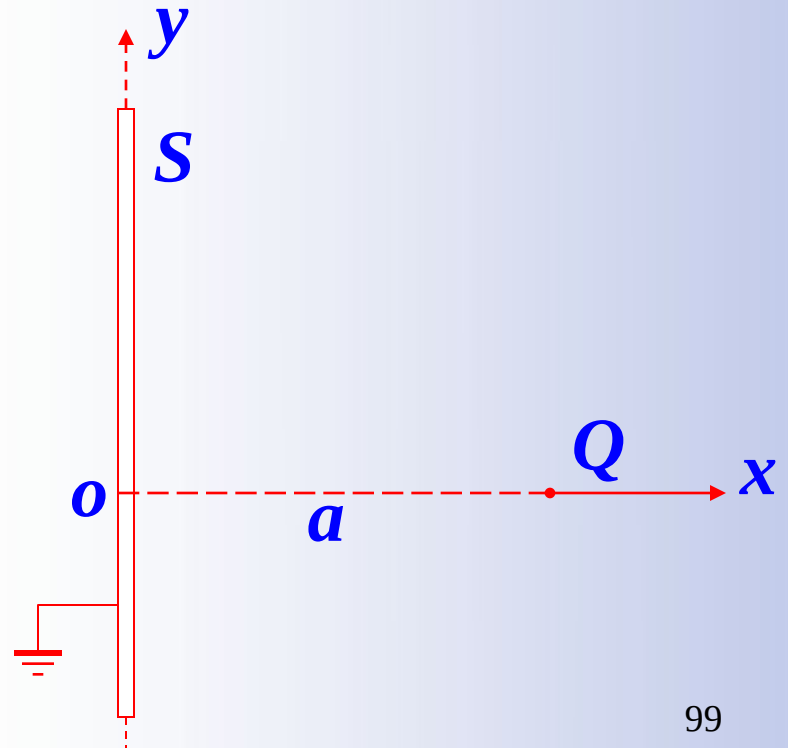
- a) 正确写出电势应满足的微分方程及给定的边界条件；
- b) 根据给定的边界条件计算象电荷的电量和所在位置；
- c) 由已知电荷及象电荷写出势的解析形式；
- d) 根据需要要求出场强、电荷分布以及电场作用力、电容等。

下面按界面形状的不同分类举例讨论：

(1) 界面为平面的情况

[例1]接地无限大平面

导体板附近有一点电荷，
其电量为 Q ，距板 a 处，
求空间中的势分布。

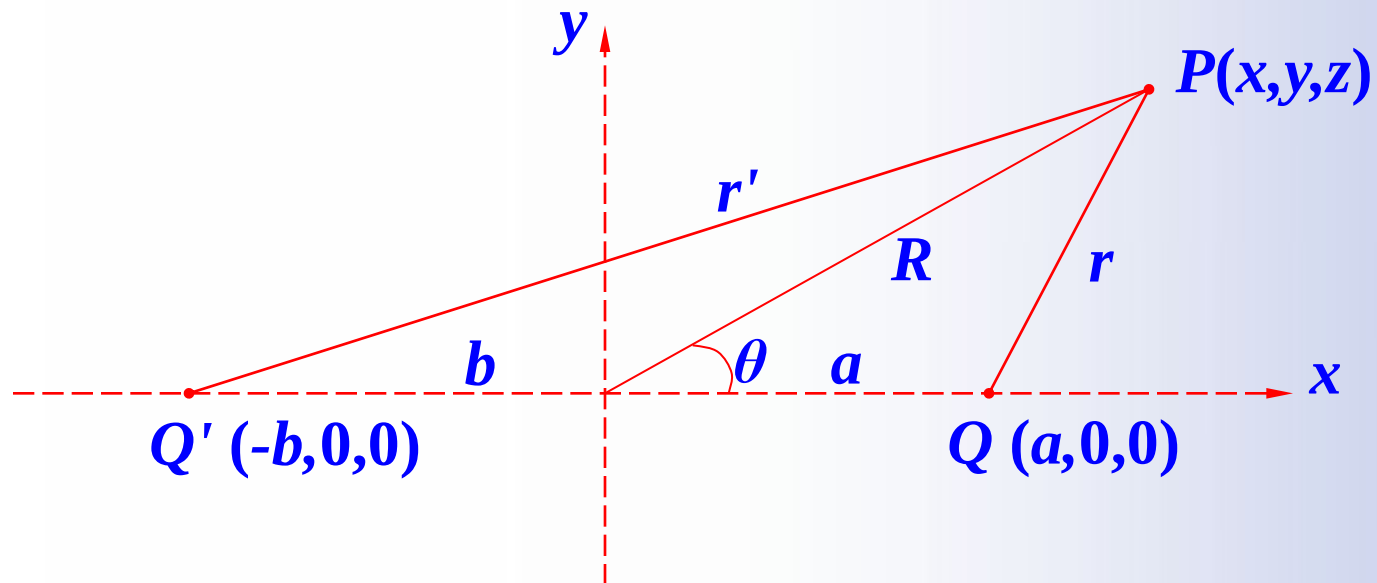


Solution:

根据静电屏蔽可判定接地导体板左半空间没有电场。右半空间的电场是 Q 及 S 面上的感应电荷面密度 $\sigma_{\text{感}}$ 共同产生的。以假想的点电荷 Q' 等效地代替感应电荷，右半空间的电势必须满足以下条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q \delta(x-a, y-0, z-0) \\ \varphi|_{R \rightarrow \infty} = 0 \\ \varphi|_{x=0} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

为了满足方程（1），假想的电荷 Q' 必须在左半空间内，这样才能使原方程不变，由（2）、（3）可求出 Q' 的位置及大小，等效图为



因此，在右半空间任一点的电势为：

$$\begin{aligned}
 \varphi_P &= \varphi_Q + \varphi_{Q'} \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}} + \frac{Q'}{\left[(x+b)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

这里因为：

$$\begin{aligned}
 \left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 \right] &= \left[x^2 - 2ax + y^2 + z^2 + a^2 \right] \\
 &= \left[R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

故有：

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} + \frac{Q'}{(R^2 + b^2 + 2bR \cos \theta)^{1/2}} \right\}$$

由（3）式得到 $x=0$ 时, $\varphi_p=0$, 要使该式成立, 只有

$$\begin{cases} Q' = -Q \\ b = a \end{cases}$$

故得到

$$\varphi_p(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(R^2 + a^2 + 2Ra \cos \theta)^{1/2}} \right]$$

▲现在求无限大接地导体板平面上的感应电荷分布情况：

根据导体平衡条件，导体面上有

$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{x=0} = \sigma_{\text{感}} / \epsilon_0$$

所以

$$\sigma_{\text{感}} = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{x=0}$$

其中

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-a)}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+a)}{\left[(x+a)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \right\} \Bigg|_{x=0}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

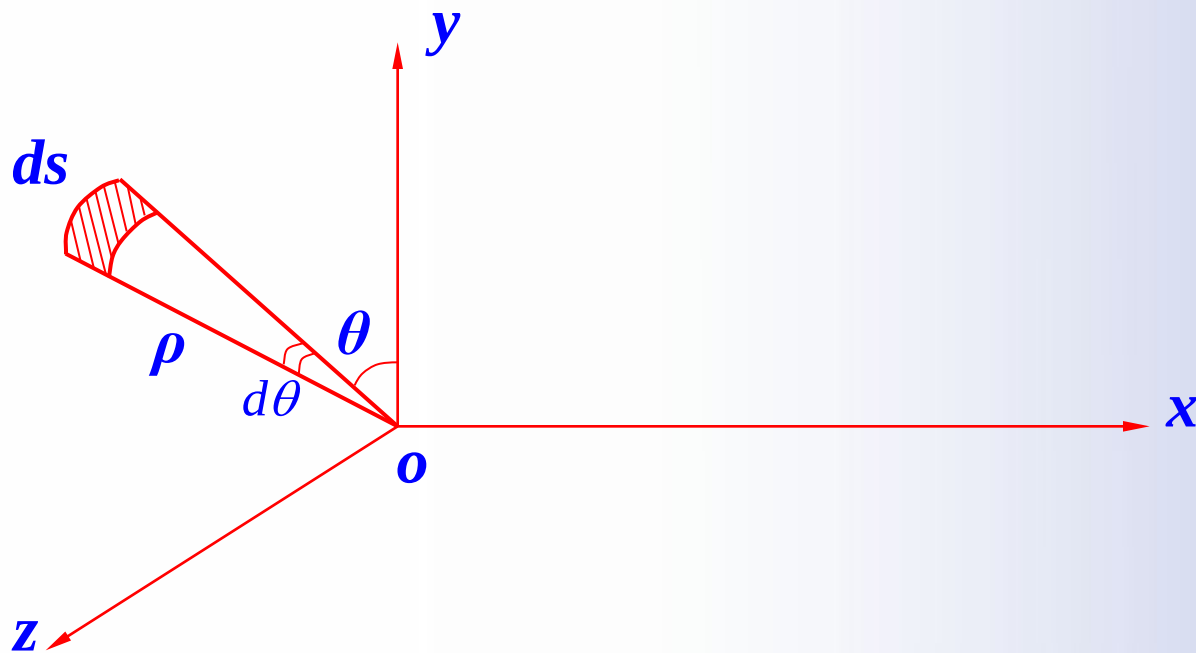
故

$$\sigma_{\text{感}} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{a}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

可见 Q' 与 Q 异号，这是合理的。

▲进一步求无限大导体面上的总感应电荷 $Q_{\text{感}}$ ：

因为 S 板面在 y, z 平面上，



所以

$$\begin{aligned}
 Q_{\text{感}} &= \iint_S \sigma_{\text{感}} ds = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_{\text{感}} \rho d\theta d\rho \quad [\rho^2 = y^2 + z^2] \\
 &= -\frac{aQ}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$= -aQ \left[-\frac{1}{(a^2 + \rho^2)^{1/2}} \right]_0^\infty$$

$$= -Q$$

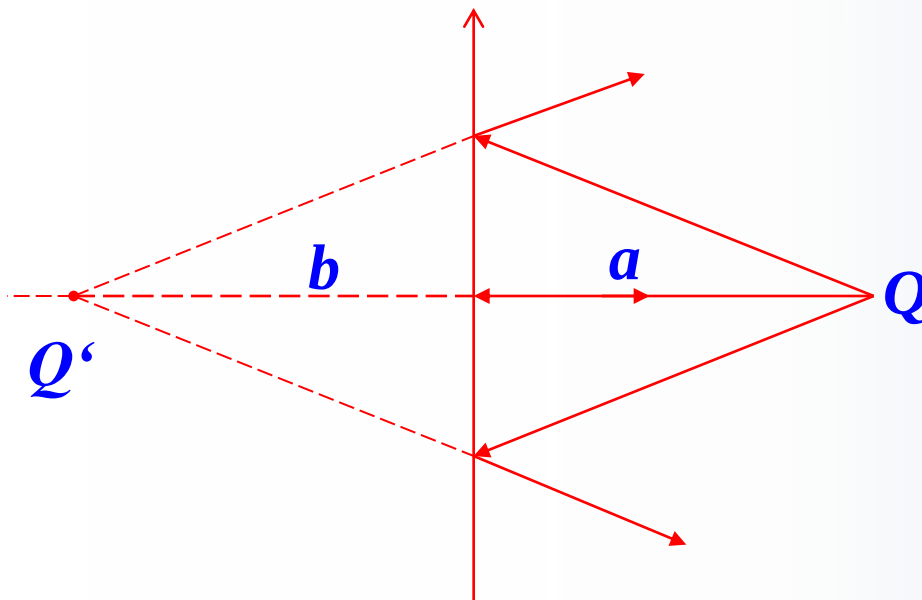
故

$$Q_{\text{感}} = -Q$$

可见，导体板面上总感应电荷 $Q_{\text{感}}$ 恰好等于点电荷 Q 的电量。

▲最后，求点电荷 Q 受到的作用力（从略）

▲镜象法的图形与光路用此图比较（了解）



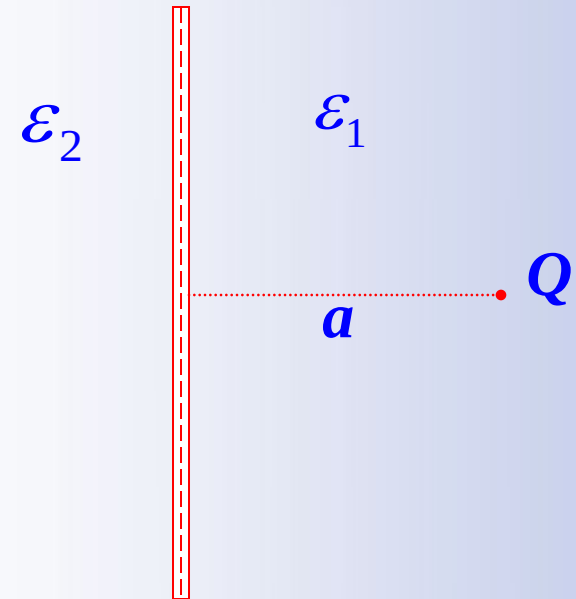
根据光的反射可找到
 Q' 的大小和位置

但要注意： 光线是直线传播到导体板面上的。有的地方是与板面 $\perp$ ，有的地方是与板面有一定夹角；但电力线切线方向是场强的方向，电力线在板面附近处处与板面 $\perp$ ，这一点通过静电平衡原理可知。

[例2]在无穷大空间中充满介电常数为 ε_1 和 ε_2 的两种均匀电介质，其分界面为平面。设在介质 ε_1 中放一点电荷 Q ，其所在位置距分界面为 a ，试求二介质中的电势分布。(作业)

Solution:

设 ε_1 中电势的 φ_1 ， ε_2 中的电势为 φ_2 ，并满足如下定解条件：



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_1 = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q \delta(x-a, y, z) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1|_{x \rightarrow \infty} = \varphi_2|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\varphi_1|_{x=0} = \varphi_2|_{x=0} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \end{array} \right. \quad (5)$$

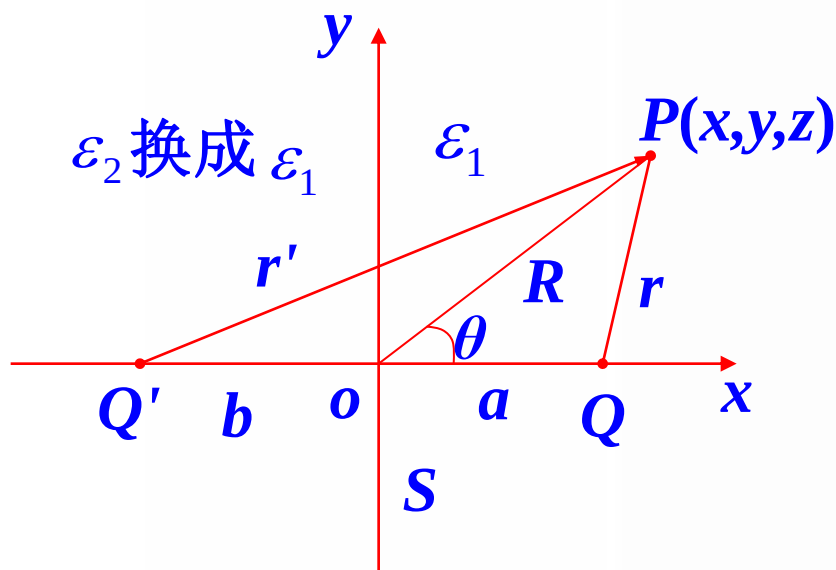
处理问题的方法是：

a) 求 ε_1 空间的电势 φ_1 时，设想将 ε_2 半空间换成与 ε_1 半空间一样，而以假想的电荷 Q' 来代替分界面上极化

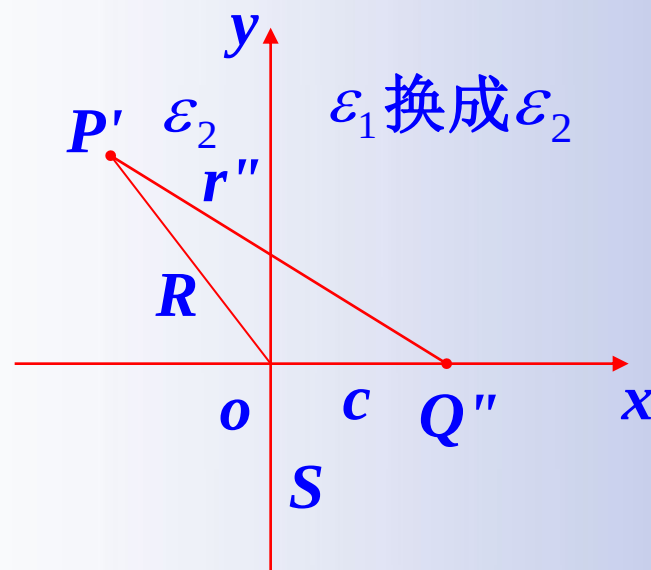
电荷对 ε_1 半空间的场的影响；

b) 求 ε_2 半空间的电势 φ_2 时，设想将 ε_1 半空间换 ε_2 成半空间一样，而以假想的电荷 Q'' 来代替 Q 和分界面上的极化电荷对 ε_2 半空间场的影响。

由此可见：



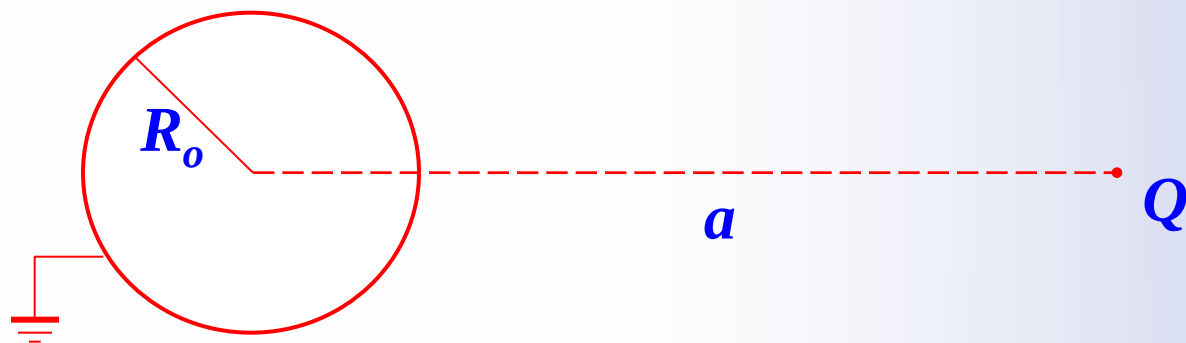
右半空间



左半空间

(2) 界面为球面的情况

[例3] 有一半径为 R_0 的接地导体球，距球心为 $a(a > R_0)$ 处有一点电荷 Q ，求空间的电势分布。



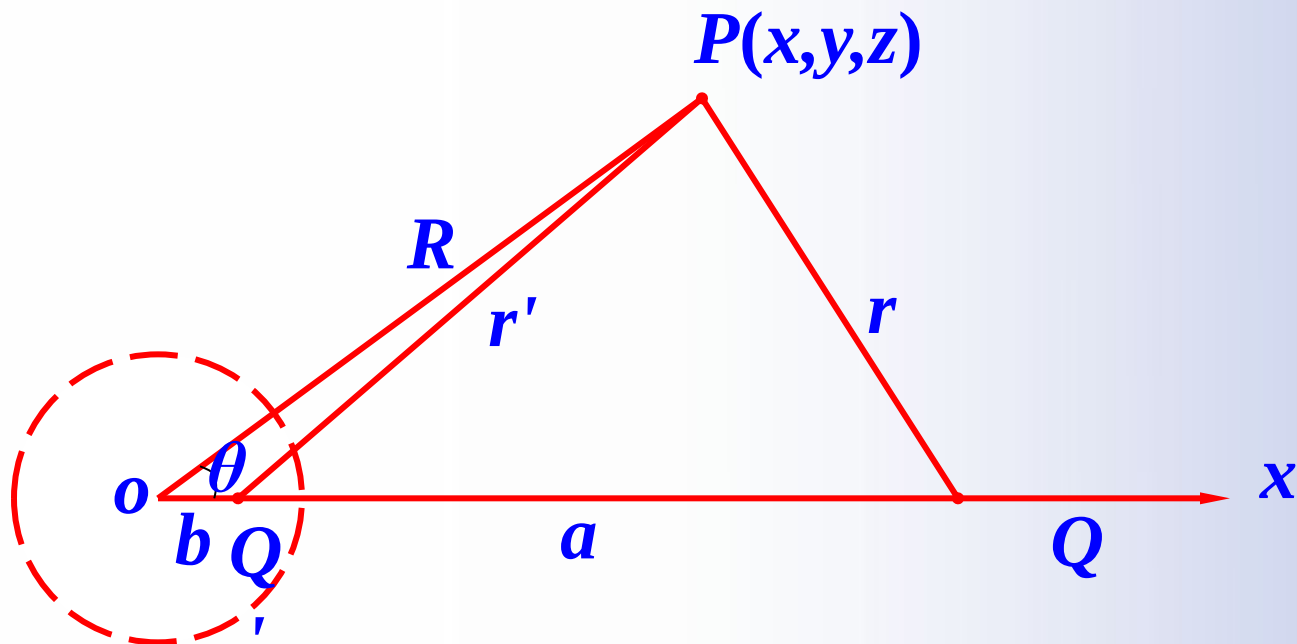
Solution:

取球心为坐标原点，球心到点电荷 Q 的方向为 x 轴，设 Q 的坐标为 $(a, 0, 0)$ 。根据静电平衡条件（现象）。球内的电势为零。故只讨论外空间的电势即可。

球外空间的电势由 Q 及球面上感应电荷共同激发的，其电势所满足的定解条件为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q \delta(x-a, y, z) \\ \varphi|_{R=R_0} = 0 \\ \varphi|_{R \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

用一个象电荷 Q' 来代替球面上的感应电荷，为了不改变原方程， Q' 必须在球内，并距球心为 b ，故等效为：



球外空间一点的电势为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{Q'}{r'} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{\left[(x-a)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}} + \frac{Q'}{\left[(x-b)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}} \right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{[R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta]^{1/2}} + \frac{Q'}{[R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta]^{1/2}} \right]$$

在 $b < R_0$ 的区域，不论 Q' 取任何值，其解都满足方程和在无穷远处的边界条件。现在的问题是如何调整 Q' 和 b 的数值使得解也满足 (2) 式。因此，把 (2) 式用于其解，则

$$\varphi|_{R=R_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{(R_0^2 + a^2 - 2R_0a \cos \theta)^{1/2}} + \frac{Q'}{(R_0^2 + b^2 - 2R_0b \cos \theta)^{1/2}} \right\} = 0$$

则有： $Q^2(R_0^2 + b^2 - 2R_0b \cos \theta) = Q'^2(R_0^2 + a^2 - 2R_0a \cos \theta)$

移项得到

$$Q^2(R_0^2 + b^2) - Q'^2(R_0^2 + a^2) = 2R_0 \cos \theta (Q^2 b - Q'^2 a)$$

式中，左边为一常数，右边含有变量 θ ，对任何 θ 值都要使上式成立，只有使两边都等于零，即

$$\begin{cases} Q^2 b = Q'^2 a & (4) \\ Q^2(R_0^2 + b^2) = Q'^2(R_0^2 + a^2) & (5) \end{cases}$$

由（4）式得

$$Q'^2 = \frac{b}{a} Q^2 \quad (6)$$

将（6）式代入（5）式得

$$\frac{b}{a}(a^2 + R_0^2) = (R_0^2 + b^2)$$

即

$$b^2 - \frac{1}{a}(a^2 + R_0^2)b + R_0^2 = 0$$

解此二次方程，得到

$$\begin{cases} b = \frac{R_0^2}{a} \\ b = a \end{cases}$$

将此代入（6）式，即有

$$\begin{cases} Q' = \pm Q & (b = a \text{时}) \\ Q' = \pm \frac{R_0}{a} Q & (b = \frac{R_0^2}{a} \text{时}) \end{cases}$$

分析这里解的形式，可知 **$b=a$** 不符合物理要求，由于此时 **Q'** 在球外空间，改变了原方程，故 **$b=a$** 及 **$Q'=\pm Q$** 应该舍去。又由于（2）式的要求， $Q' = +\frac{R_0}{a} Q$ 不符合要求。至此只有解

$$\begin{cases} b = \frac{R_0^2}{a} \\ Q' = -\frac{R_0}{a} Q \end{cases} \quad (7)$$

才是符合要求的解。

因此，球外空间任一点的电势为

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R_0/a}{(R^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2R \frac{R_0^2}{a} \cos \theta)^{1/2}} \right] \quad (8)$$

▲球面上的感应电荷面密度:

$$\sigma_{\text{感}} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right|_{R=R_0} = -\frac{Q}{4\pi R_0 a} \frac{(1 - \frac{R_0^2}{a^2})}{\left[1 + \frac{R_0^2}{a^2} - 2 \frac{R_0}{a} \cos \theta \right]^{3/2}}$$

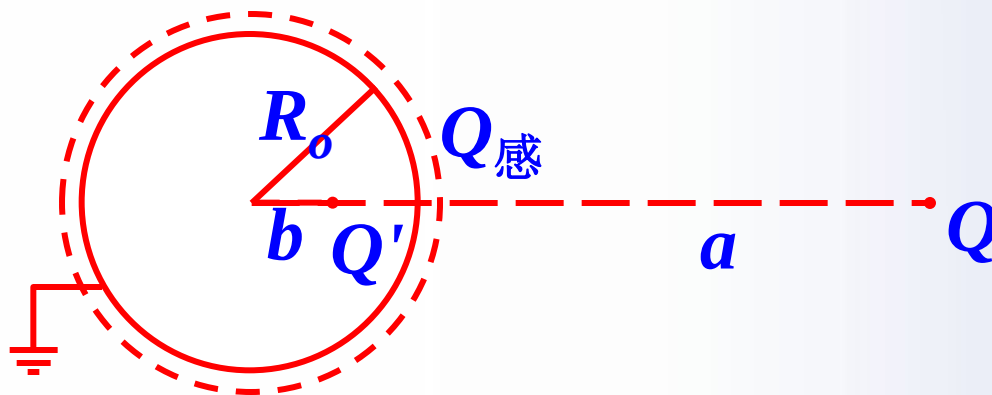
▲ 总感应电荷为

$$Q_{\text{感}} = \iint_S \sigma_{\text{感}} ds = \iint_S \sigma_{\text{感}} R_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{R_0}{a} Q$$

即感应电荷的大小等于象电荷 Q' 的大小。

▲ 也可以这样证明：

根据Gauss定理，对球作Gauss面，即



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{感}}$$

式中的 $\vec{E}$ 是象电荷 Q' 和真实电荷 Q 共同产生的，即

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q'$$

故 $Q_{\text{感}} = Q'$

即感应电荷的电量 $Q_{\text{感}}$ 等于象电荷的电量 Q' 。

▲根据上述例子，作如下几点讨论：

a) 导体球既不接地又不带电

这种情况与[例3]的差别仅在于边界条件，这里

$$\varphi|_{R=R_0} = \text{常数} \quad (\text{未知})$$

导体球不带电，即要求满足电中性条件

$$-\varepsilon_0 \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0$$

显然，[例3]的解（8）式不满足电中性的条件，如果

在球内再添置一个象电荷 $Q'' = \frac{R_0}{a} Q$ ，则满足电中性条

件，为了不破坏导体是等位体的条件，由对称性知道， Q'' 必须放在球心处，于是

$$\varphi_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R_0/a}{(R^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2R \frac{R_0^2}{a} \cos \theta)^{1/2}} + \frac{R_0/a}{R} \right\} \quad (R > R_0)$$

再由 $\varphi_{\text{内}}|_{R=R_0} = \varphi_{\text{外}}|_{R=R_0}$

得到

$$\varphi_{\text{内}} = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

b) 导体球不带电其电势的 U_0

这种情况与[例3]的差别仍然在边界条件，这里

$$\varphi_{\text{内}} \Big|_{R=R_0} = U_0$$

U_0 是已知常数，导体球的电势为 U_0 ，相当于在球心处放置了电量为 $4\pi\epsilon_0 U_0 R_0$ 的点电荷，显然，其解为

$$\varphi_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R_0/a}{(R^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2R \frac{R_0^2}{a} \cos \theta)^{1/2}} + \frac{4\pi\epsilon_0 U_0 R_0 / Q}{R} \right\}$$

由 $\varphi_{\text{内}}|_{R=R_0} = \varphi_{\text{外}}|_{R=R_0}$
得到

$$\varphi_{\text{内}} = U_0$$

c)若点电荷 Q 在导体球壳内距球心 a 处

这时与[例3]的情况相比，仅是源电荷的位置由球

外搬进到球内。此时，接地球壳外无场强，场的区域在球内。故可根据光路可逆性原理来解释：球内的电势等于源电荷 Q 和球面上的感应电荷（球壳内表面）

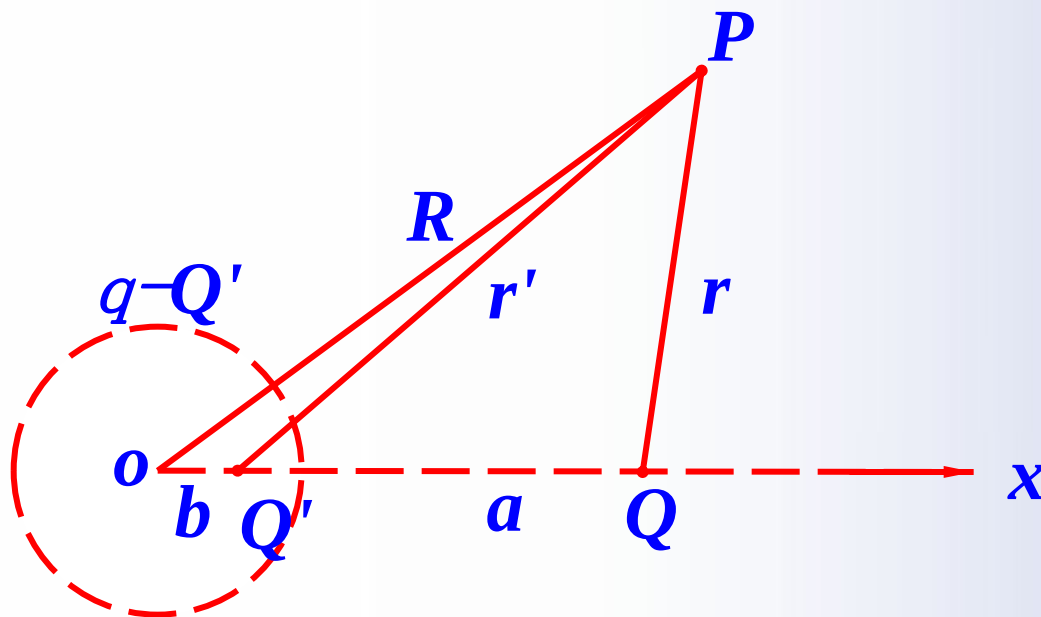
—象电荷 Q' （在球外 $\frac{R_0^2}{a}$ 处）产生的电势：

$$\varphi_{\text{内}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R_0/a}{(R^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2R \frac{R_0^2}{a} \cos \theta)^{1/2}} \right\}$$

这里要注意：象电荷的电量 Q' 大于源电荷的电量 Q ，球内的电势与导体球是否接地、是否带电无关。

d) 若导体球带电 q 但不接地

这种情况的物理模型为：



如前，球外电荷 Q 会在球内 b 处感应出镜像电荷 Q' 。
要保持球带电 q ，则可假象球心有电荷 $(q - Q')$ ，则 P 点的电势为

$$\varphi_{\text{外}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{1/2}} - \frac{\frac{R_0}{a} Q}{(R^2 + \frac{R_0^4}{a^2} - 2R \frac{R_0^2}{a} \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q + \frac{R_0}{a} Q}{R} \right\}$$

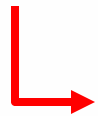
由 $\varphi_{\text{内}}|_{R=R_0} = \varphi_{\text{外}}|_{R=R_0}$ 得到

$$\varphi_{\text{内}} = \frac{Q' + q}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{q + \frac{R_0}{a} Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

▲顺便计算导体对点电荷 Q 的作用力:

此时, 源电荷 Q 所受到的作用力来自球面上的电荷, 即

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$



$$\text{而 } \vec{E} = -\frac{\partial \varphi_{\text{外}}}{\partial n} \hat{n} \Big|_{R=a} = -\frac{\partial \varphi_{\text{外}}}{\partial R} \vec{e}_x \Big|_{R=a}$$

从而得到

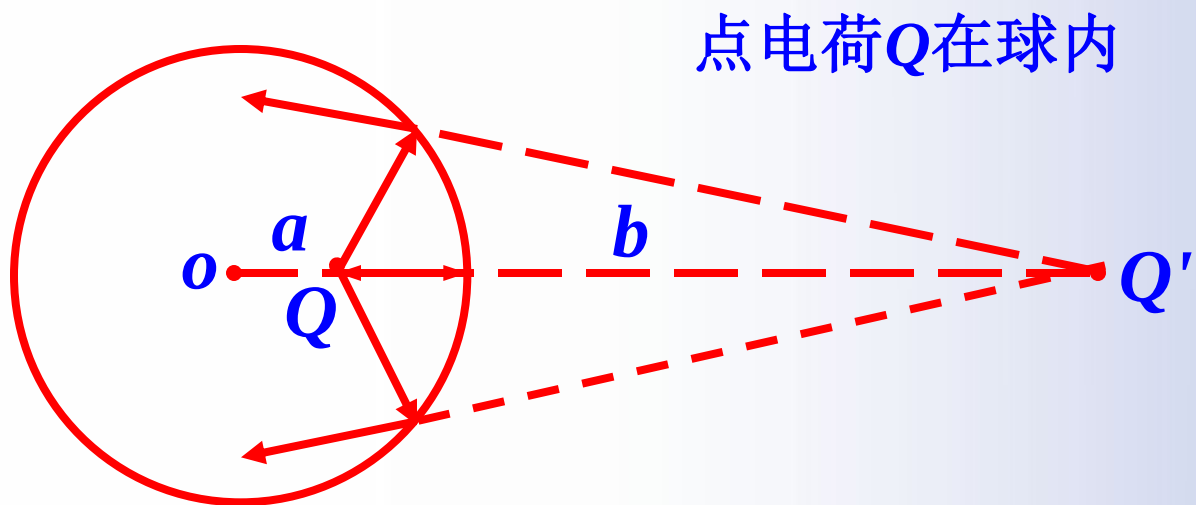
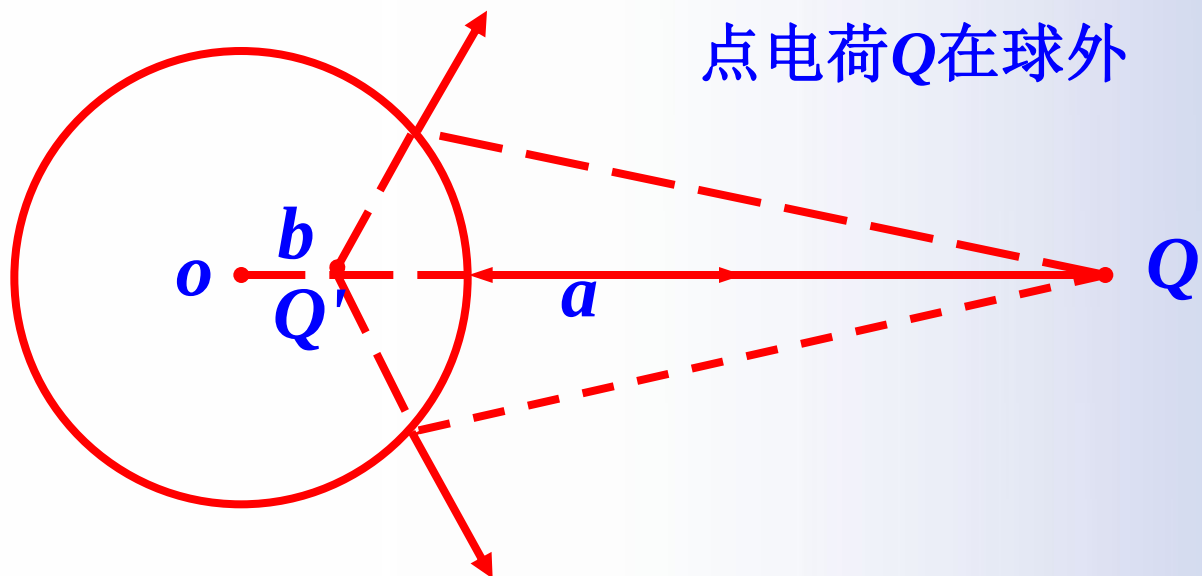
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q(q + \frac{R_0}{a}Q)}{a^2} - \frac{Q^2(\frac{R_0}{a})}{(a - \frac{R_0^2}{a})^2} \right] \vec{e}_x$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left[q - \frac{QR_0^3(2a^2 - R_0^2)}{a(a^2 - R_0^2)^2} \right] \vec{e}_x$$

▲当 $a \gg R_0$, $\vec{F} \cong \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_x$, 即近似为两点电荷作用, Qq 同号为排斥力, 异号为吸引力;

▲当 Q 靠近球面时, $\frac{a}{R_0} \sim 1$, 此时不论 q 与 Q 是否同号, 作用力永远为引力, 这可由在 Q 附近的感应电荷与其反号来解释。

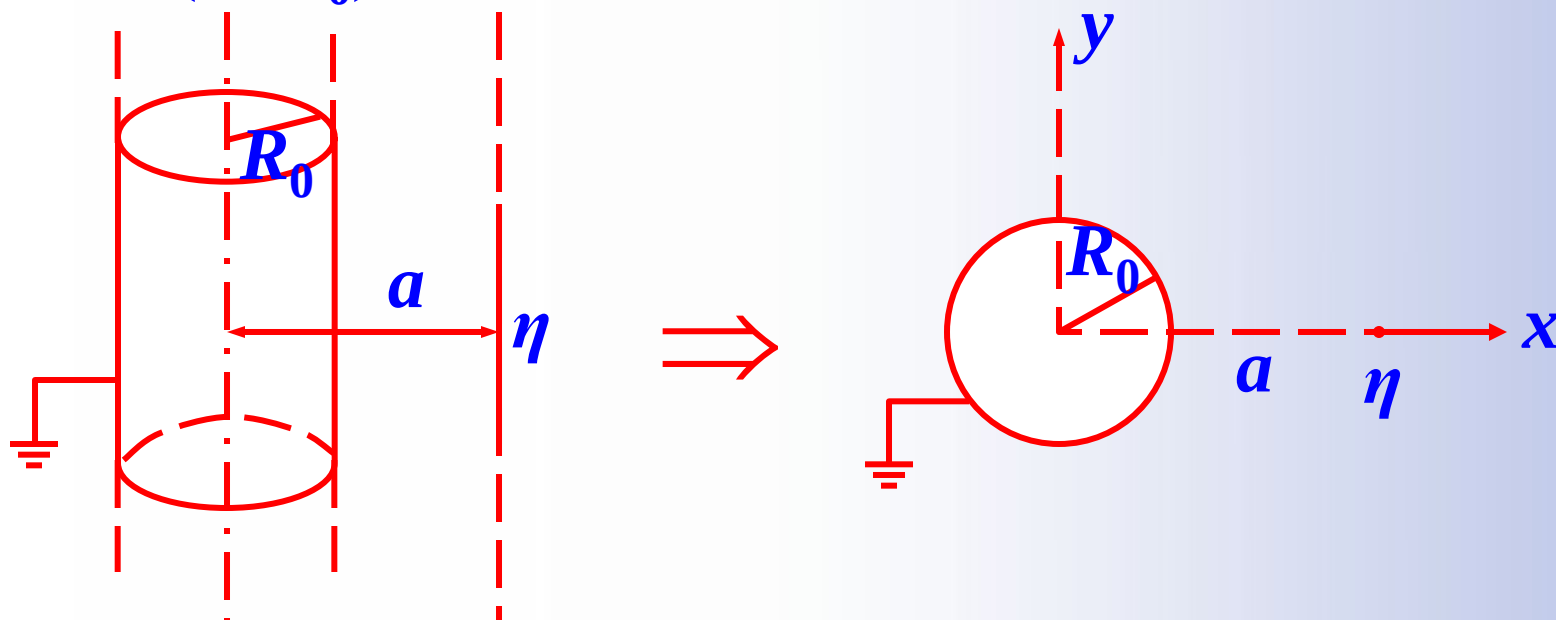
▲ 镜象法与光路图比较



(3) 界面为柱面的情况

(作业)

[例4] 有一线电荷密度为 η 的无限长带电直线与半径为 R_0 的接地无限长导体圆柱轴线平行。直线与圆柱轴线的距离为 a ($a > R_0$)，试求空间的电势分布。



提示：首先要写对柱坐标下的电势的表达式！

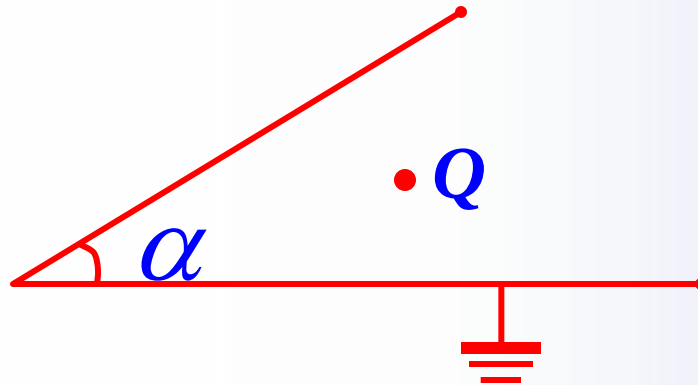
(4) 界面为劈形的情况 (思考题)

[例5] 有两个相交的接地导体平面，其夹角为 α ，若在所夹区域内有一电量为 Q 的点电荷，求下列情况下所夹区域内的电势：

a) $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$



§ 2.5 格林函数法

Method of Green Function

一、 分离变量法和镜像法能解的情况

- 1、 分离变量法能解的情况：自由电荷全聚集在边界上，也就是说：在要求解电场区域没有自由电荷(泊松方程转变为拉普拉斯方程)+边界条件。

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

- 2、 镜像法能解的情况：在求解区域内没有自由电荷，或者只有有限几个点电荷，并且区域边界或介质界面规则(电场能用等效电荷代替)+边界条件。

二、Green函数法能解的情况

能用Green定理求解静电边值问题的情况：
给定区域V内电荷分布 $\rho(\bar{x})$ ，和区域V的边界面S上各点的电势 φ_s 或电势法向导数 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s$ 。

第一类边值问题: 给定S上的电势 φ_s ，也称狄利克莱边值问题；

第二类边值问题: 给定S上的 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_s$ ，也称诺埃曼边值问题。

下面将讨论这些边值问题是怎样借助于有关点电荷的较简单的边值问题而得到解决的。

三、点电荷密度的 δ 函数表示

因为点电荷分布的特点是在点电荷所在处的电荷密度变为无穷大，而在其他地方电荷密度为零。若在 $\vec{x}'$ 处有一点电荷 Q ，则电荷密度可写为

$$\rho(\vec{x}) = Q\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 0 & \vec{x}' \neq \vec{x} \\ \infty & \vec{x}' = \vec{x} \end{cases} \quad (1)$$

显然

$$\int_V \rho(\vec{x}) d\tau = \int_V Q\delta(\vec{x} - \vec{x}') d\tau = Q$$

对于单位点电荷而言， $Q=1$ ，其密度为

$$\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2)$$

四、Green函数

一个处在 $\vec{x}'$ 点上的单位点电荷，它所激发的电势方程为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3)$$

假设有一包含 $\vec{x}'$ 点的某空间区域 V ，在 V 的边界 S 上 φ 有如下边界条件

$$\varphi|_S = 0 \quad \text{或者} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{\epsilon_0 S} \quad (4)$$

则把满足边界条件（4）式的（3）式的解称为泊松方程在区域V的第一类或第二类边值问题的Green函数。

Green函数一般用 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 表示， $\vec{x}'$ 表示单位电荷所在的位置， $\vec{x}$ 代表观察点，在（3）式和（4）式中，把 φ 换成 G ，即Green函数所满足的方程和边界条件为

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ G(\vec{x}, \vec{x}')|_S = 0, \text{ 或 } \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n} \Big|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S} \end{cases} \quad (5)$$

五、Green公式和边值问题的解

在这里，将用Green公式把一般Poisson方程的边值问题的解用Green 函数联系起来。

(1) 先看Green公式的两种形式

根据 Gauss 定理，知道

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{a}) d\tau = \oiint_S \vec{a} \cdot d\vec{s} = \oiint_S a_n ds$$

当 $\vec{a} = \psi \nabla \varphi$ ， ψ 和 φ 均为连续，可微的标量点函数，故

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{a} &= \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) \\ &= \psi \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \\ &= \psi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \end{aligned}$$

$$\text{又} \because a_n = \vec{a} \cdot \hat{n} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

于是，有

$$\int_V \left[\psi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi) \right] d\tau = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (6)$$

式中 V 为包围面 S 所围的面积，该式称为**Green**第一公式。

如果上式中的 φ 和 ψ 对调，即 $\vec{a} = \varphi \nabla \psi$ ，同理得到

$$\int_V \left[\varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi) \right] d\tau = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \quad (7)$$

将（6）式减去（7）式，得

$$\int_V [\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi] d\tau = \oint_S \left[\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] ds \quad (8)$$

该式称为Green第二公式

Green第一、第二公式是等价的。同时，视方便而选取之。Green公式对解静电问题的意义是：在区域V内找一个待定函数 ψ （ φ 为待求），通过这个公式从已知确定未知。

（2）边值问题的解

给定一个区域V，其中给定了 $\rho(\vec{x})$ ， $\varphi|_S$ ， $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S$

且待求的边值问题:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x})$$

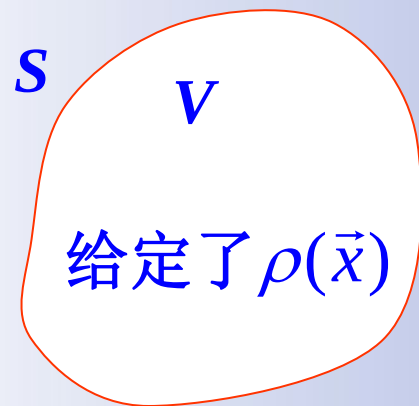
相应的Green函数问题是:

$$\nabla^2 G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

边界条件:

$$G|_S = 0 \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$$

现在, 取 φ 满足 $\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{x})$



取 ψ 满足 $\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$

代入Green第二公式，有

$$\begin{aligned} & \int_V \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla^2 \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}) \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') \right] d\tau \\ &= \oiint_S \left[G(\vec{x} \cdot \vec{x}') \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial n} - \varphi(\vec{x}) \frac{\partial G(\vec{x} \cdot \vec{x}')}{\partial n} \right] ds \end{aligned}$$

因为Green公式中积分，微分都是对变量 $\vec{x}$ 进行的，由于Green函数关于源点和场点是对称的，即 $G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = G(\vec{x}' \cdot \vec{x})$ 为方便起见，把变量 $\vec{x}$ 换为 $\vec{x}'$ ，故有 ∇ 改为 ∇' ，即得

$$\int_V \left[-G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}') + \varphi(\vec{x}') \frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{x}' - \vec{x}) \right] d\tau'$$

$$= \oiint_S \left[G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \right] ds'$$

该式左边第二项为

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \varphi(\vec{x}') \delta(\vec{x}' - \vec{x}) d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0} \varphi(\vec{x})$$

得到

$$-\int_V \left[G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}') \right] d\tau' + \frac{1}{\epsilon_0} \varphi(\vec{x})$$

$$= \oiint_S \left[G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \right] ds'$$

故得到

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \rho(\vec{x}') d\tau' + \varepsilon_0 \oiint_S \left[G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \right] ds'$$

这就是用**Green**函数求解静电问题的一种形式解。

讨论几点:

a) 在区域V中, 任一点的势唯一地决定 $\rho(\vec{x}')$ 电荷分布及边界的值 $\varphi|_s$ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_s$

b) 如果所取的Green函数属于第一类问题, 即 $G(\vec{x} \cdot \vec{x}')|_S = 0$ 这时则有

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \rho(\vec{x}') d\tau' - \varepsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} ds'$$

这实质上就是第一类边值问题的解

c) 如果所取的Green函数属于第二类问题, 即

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$$

在这里要说明一点的是: 对第二类静电边值问题不能用第二类齐次边界的Green函数, 即 $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_S = 0$, 因

为 **Green**函数 $G(\vec{x} \cdot \vec{x}')$ 所代表的物理意义是在 $\vec{x}'$ 处存在一个单位电荷在空间所激发的电势。因此 $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_s = 0$ 即代表单位电荷在边界上所激发的电场，由**Gauss**定理知道

$$-\oint_s \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) ds' = \frac{1}{\varepsilon_0}$$

由此可见

$$\oint_s \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) ds' \neq 0$$

故

$$\left. \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \right|_s \neq 0$$

从而，Green函数在边界上的最简单的形式是取

$$\left. \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \right|_S = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$$

这样且有第二类静电边值问题的Green函数解的形式：

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= \int_V G(\vec{x} \cdot \vec{x}') \rho(\vec{x}') d\tau' + \varepsilon_0 \oiint_S \left[G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} + \varphi(\vec{x}') \frac{1}{\varepsilon_0 S} \right] ds' \\ &= \int_V G(\vec{x} \cdot \vec{x}') \rho(\vec{x}') d\tau' + \varepsilon_0 \oiint_S G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} ds' + \frac{1}{S} \oiint_S \varphi(\vec{x}') ds' \end{aligned}$$

式中 $\frac{1}{S} \oiint_S \varphi(\vec{x}') ds'$ 为 φ 在边界面S上的平均值。

在实际问题中，常遇到这类问题：在所考察的区域包含有无穷大的边界面，假如，考察一导体球外的空间电势分布问题，这时所考察的区域是球面和无穷大曲面间包围的区域，所以这时边界面 $S \rightarrow \infty$ 故有

$$\left. \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \right|_S = -\frac{1}{\epsilon_0 S} \rightarrow 0$$

于是

$$\frac{1}{S} \oiint_S \varphi(\vec{x}') ds' = 0$$

故得到

$$\varphi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x} \cdot \vec{x}') \rho(\vec{x}') d\tau' + \epsilon_0 \oiint_S G(\vec{x}' \cdot \vec{x}) \frac{\partial \varphi(\vec{x}')}{\partial n'} ds'$$

此式称为外问题的Green函数解的形式。

六、Green函数的制作

以上的讨论，表面上似乎把静电边值问题的解找到了，其实并非如此，因为只有把问题的Green函数找到了，才能对表达式（第一类边值问题的形式解和第二类边值问题的形式解）作出具体的计算。实际求Green函数本身并不是件容易的事，所以以上解的形式只具有形式解的意义。当然，它把唯一性定理更具体地表达出来了。

在这里介绍几种不同区域的Green函数的制作方法。

(1) 无界空间的Green函数

即在无穷大空间中放一个单位点电荷，求空间某处的电势，也就是Green函数。

$$G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

其中， $\vec{x}'$ 代表单位电荷的所在位置（源点坐标）， $\vec{x}$ 代表观察点坐标（场点坐标）。

证明上述Green函数是否满足Green函数所满足的微分方程。

证明：选电荷所在处为坐标原点，即 $\vec{x}' = 0$ ，在球坐

标系中

$$G(\vec{x} \cdot 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

考虑球对称性，得到

$$\nabla^2 G(\vec{x} \cdot 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \frac{1}{r}$$

而 $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \quad (r \neq 0)$

当 $r=0$ 时，取一小球面 S 包围着原点，取 $\nabla^2 \frac{1}{r}$ 对小球体
积 V 积分，即

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau &= \int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} d\tau = \oiint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s} \\
&= -\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} = -\oiint_S \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega \\
&= -4\pi
\end{aligned}$$

从 δ 函数性质可知，保持小体积 V 的面积为1，从而有

$$\int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') d\tau = -\int_V \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau = 1$$

故得到

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (r=0)$$

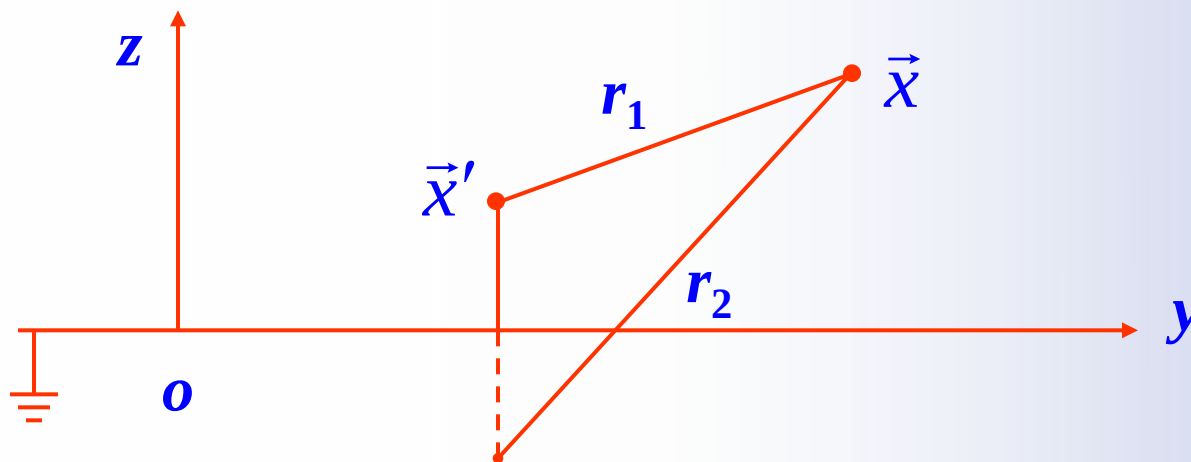
与微分方程比较，即有

$$\nabla^2 G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

这里把 $\vec{x}$ 与 $\vec{x}'$ 互换， $G(\vec{x} \cdot \vec{x}')$ 不变，即有 $G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = G(\vec{x}' \cdot \vec{x})$
这就说明 Green 函数具有对称性。

(2) 上半空间的 Green 函数

即在接地导体平面的上半空间，由于 $G|_S = 0$ ，属于第一类边值问题。



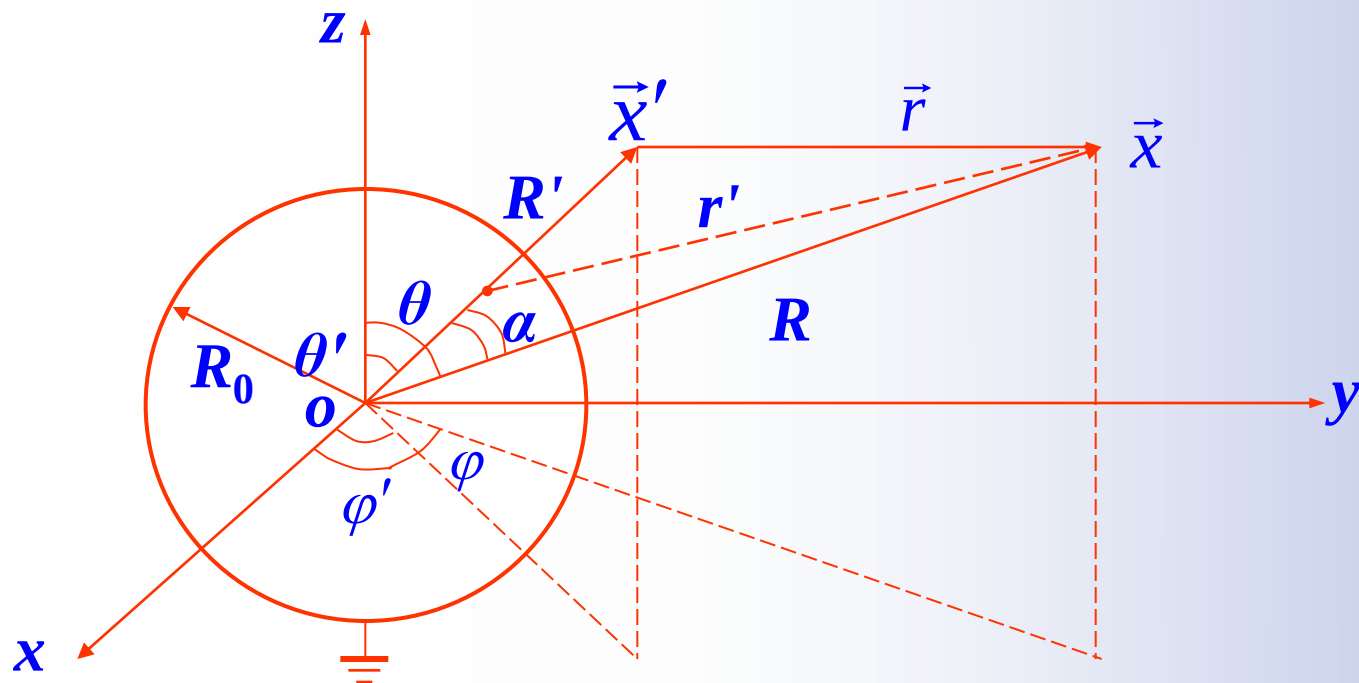
根据镜象法得到：

$$G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 \right]^{1/2}} \right\}$$

这也可看到 $G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = G(\vec{x}' \cdot \vec{x})$

(3) 球外空间的 Green 函数

即在接地导体球外的空间，由 $G|_S = 0$ ，属于第一类边值问题。



其中： $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

$$\cos \alpha = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

$$r = |\vec{x} - \vec{x}'| = [R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha]^{1/2}$$

$$r' = |\vec{x} - (\frac{R_0}{R'})^2 \vec{x}'| = \frac{1}{R'} [R^2 R'^2 + R_0^4 - 2R_0^2 RR' \cos \alpha]^{1/2}$$

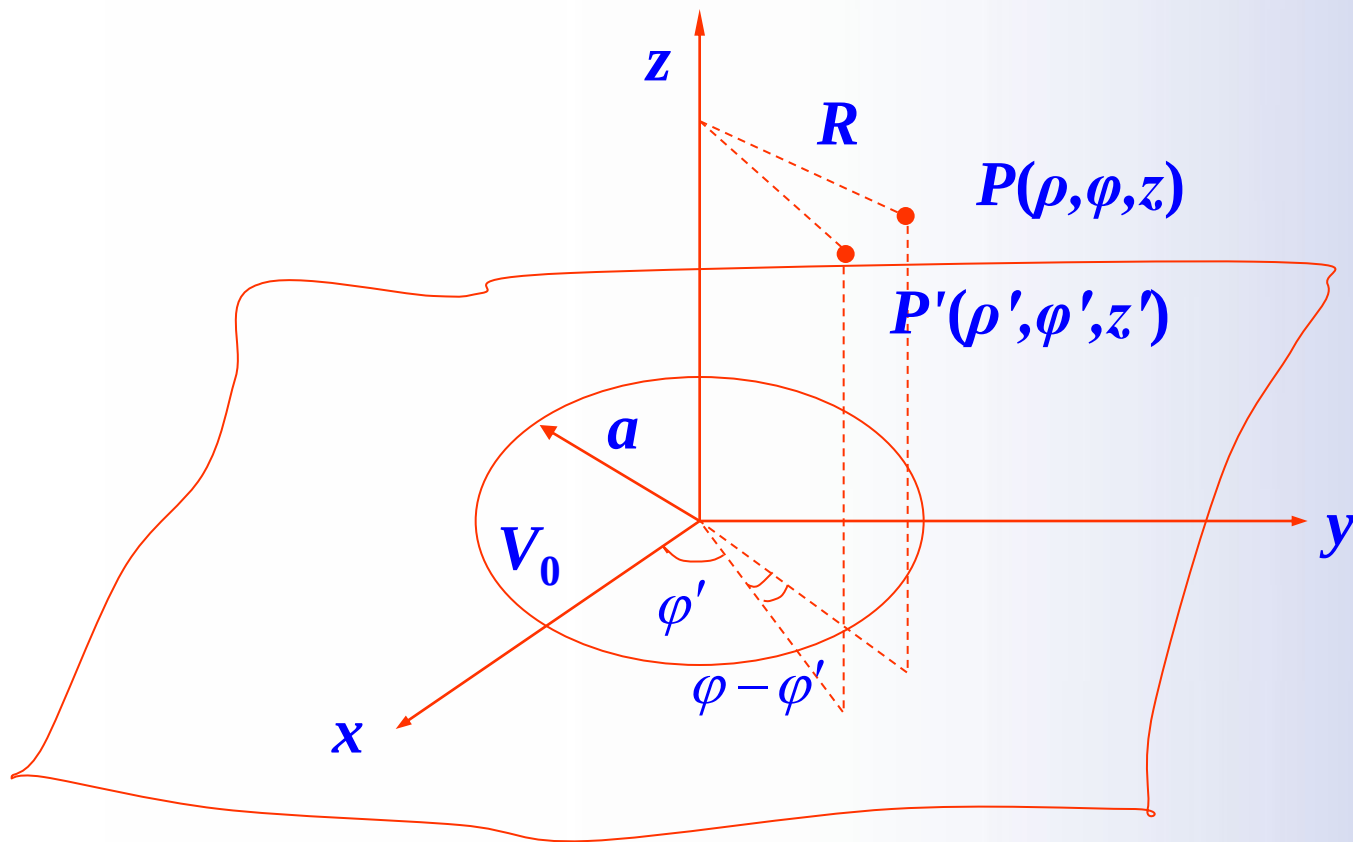
根据镜象法得

$$G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \alpha)^{1/2}} - \frac{1}{((\frac{RR'}{R_0})^2 + R_0^2 - 2RR' \cos \alpha)^{1/2}} \right]$$

在制作Green函数时，必须注意：求Green函数本身不是很容易的，只有当区域具有简单几何形状时才能得出解析的解，如果 $\rho(\vec{x}')=0$ 时，Green函数法也可以用来解Laplace equation的边值问题。

七、Green函数法的应用举例

[例] 在无穷大导体平面上有半径为 a 的圆，园内和园外用极狭窄的绝缘环绝缘，设园内电势为 V_0 ，导体板其余部分电势为零，求上半空间的电势。



Solution:

静电问题:

求解

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0 \quad z > 0 \\ \varphi|_{\substack{z=0 \\ R \leq a}} = V_0 \\ \varphi|_{\substack{z=0 \\ R > a}} = 0 \end{array} \right.$$

此题Green函数满足的形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ G(\vec{x}, \vec{x}')|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

相当于无穷大金属平板旁边放置单位电荷求电势问题

其 Green 函数为

$$G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

其中： $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$

换为柱坐标，且有

$$(x - x')^2 = (R \cos \phi - R' \cos \phi')^2$$

$$(y - y')^2 = (R \sin \phi - R' \sin \phi')^2$$

$$(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$$

故 Green 函数为

$$G(\vec{x} \cdot \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + z^2 + R'^2 + z'^2 - 2zz' - 2RR' \cos(\phi - \phi') \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[R^2 + z^2 + R'^2 + z'^2 + 2zz' - 2RR' \cos(\phi - \phi') \right]^{1/2}} \right\}$$

又 $\because$ 电荷密度 $\rho(\vec{x}') = 0$ ，还有 $G|_S = 0$ 故得到

$$\varphi(\vec{x}) = -\epsilon_0 \oiint_S \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x} \cdot \vec{x}')}{\partial n'} ds'$$

因为积分面 S 是 $z'=0$ 的无穷大平面，法线沿 $-z'$ 方向，

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} \Big|_S &= \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial z'} \Big|_{z'=0} \\
 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left[R^2 + z^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') \right]^{3/2}}
 \end{aligned}$$

由于S上只有园内部分电势不为零，因此式子

$$\varphi(\vec{x}) = -\epsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} ds'$$

中的积分只需对 $r \leq a$ 积分，即可。

$$\because \quad \varphi(\vec{x}') = V_0. \quad ds' = R' dR' d\phi'$$

故

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= -\varepsilon_0 \oint_S \varphi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}' \cdot \vec{x})}{\partial n'} ds' \\&= \frac{V_0}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z}{\left[R^2 + z^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi') \right]^{3/2}} \\&= \frac{V_0 z}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{(R^2 + z^2)} \left[1 + \frac{R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2} \right]^{-3/2}\end{aligned}$$

在很远处, $(R^2 + z^2 \gg a^2)$ 的电势可以展开成幂级数, 积分的被积函数分母展开

$$(1 + \alpha)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{15}{8} \alpha^2 + \dots$$

其中

$$\alpha = \frac{R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')}{R^2 + z^2}$$

注意到 $\cos(\phi - \phi')$ 对 ϕ' 一个或数个 2π 周期的积分为零，故

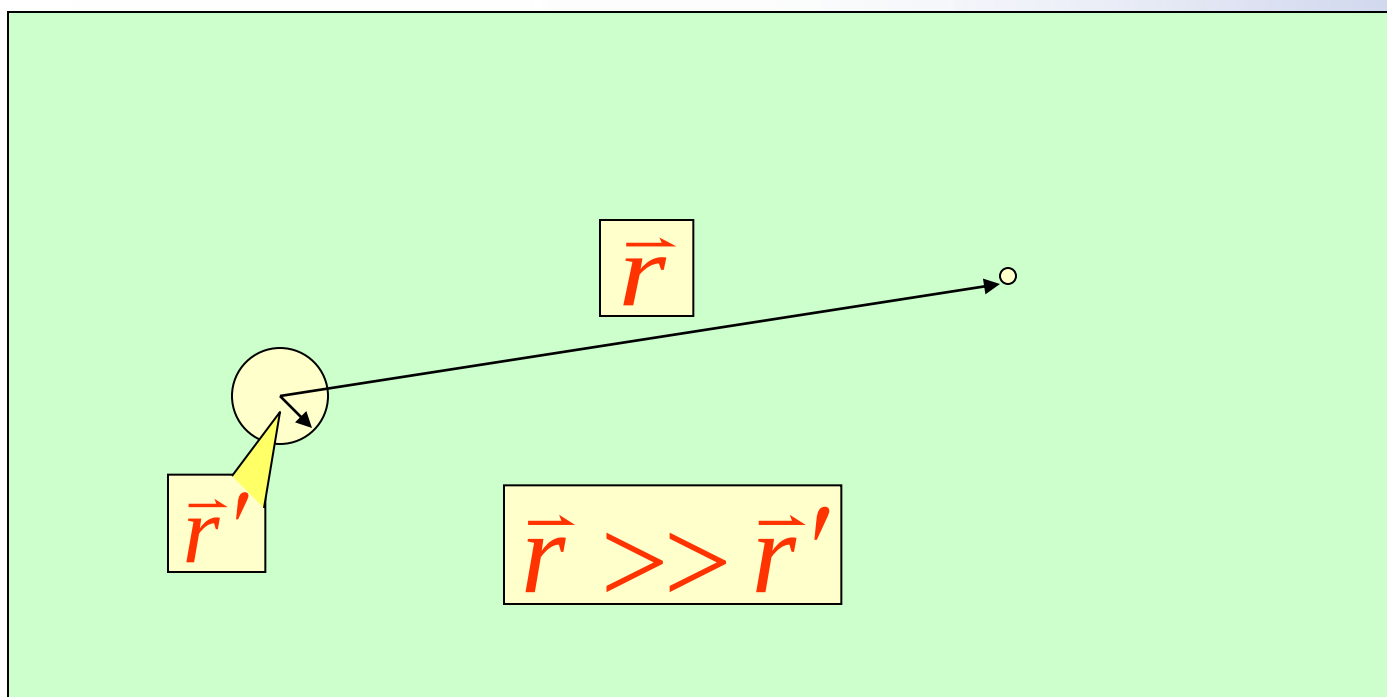
$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= \frac{V_0 z}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{[R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]}{(R^2 + z^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} \frac{R'^4 - 4RR'^3 \cos(\phi - \phi') + 4R^2 R'^2 \cos(\phi - \phi')}{(R^2 + z^2)^2} \right\} \\ &= \frac{V_0 a^2 z}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{R^2 + z^2} + \dots \right]\end{aligned}$$

§ 2.6 电多极矩

Electric Multipole Moment

电多极矩

电多极矩方法适应的范围：源点大小 $\vec{r}'$ 远小于场点到源点的距离 $\vec{r}$ 。



电多极矩

电势: $\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 r}$ $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \left[\frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \frac{1}{r} + \dots \right] dV'$$

令

电荷

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}') dV'$$

电多极矩

电偶极矩

$$\vec{P} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'$$

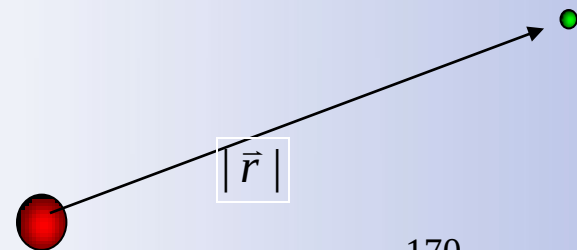
电四极矩

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\vec{r}') dV'$$

$$\vec{\vec{\mathcal{D}}} = \int_V 3\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

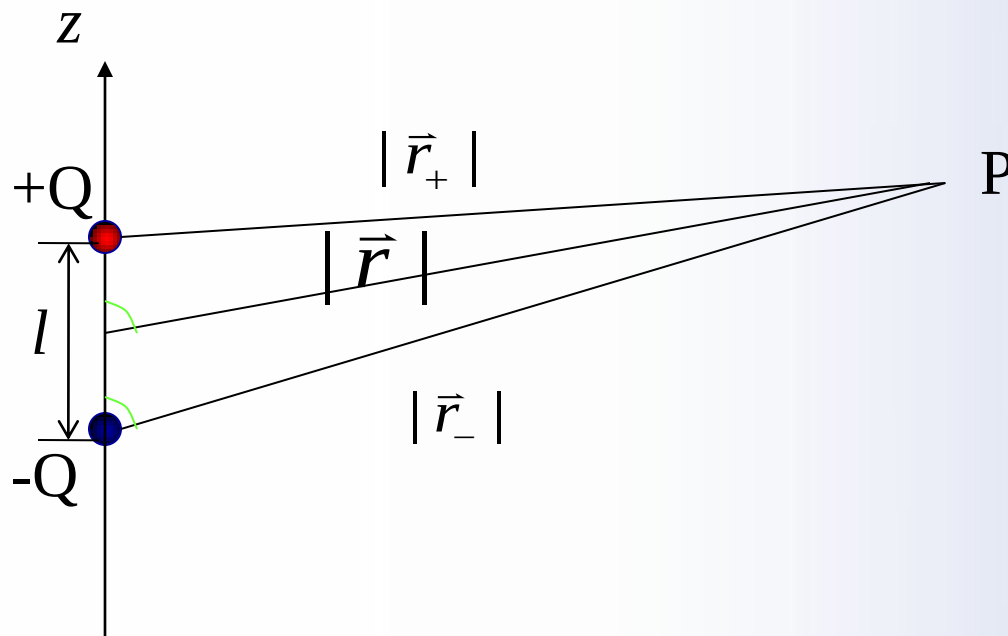
零级电势:

$$\varphi^{(0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|}$$



电多极矩

$$\text{一级电势 } \varphi^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} P_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r}|}$$



电多极矩

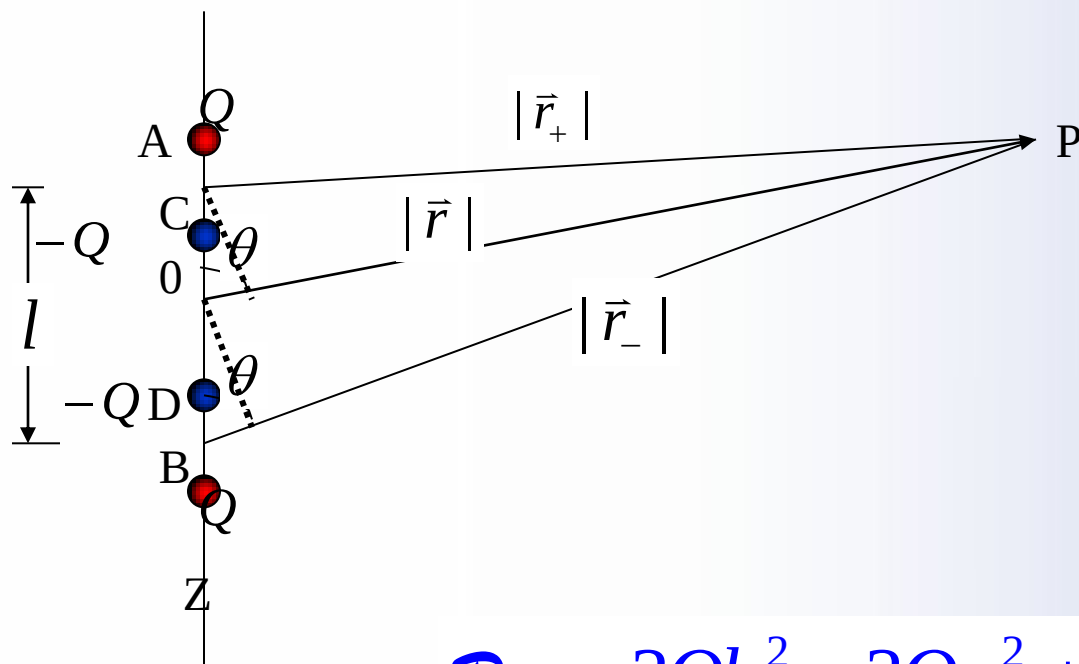
二级电势:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \sum_{i,j} \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{\vec{\mathcal{D}}} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} & \mathcal{D}_{13} \\ \mathcal{D}_{21} & \mathcal{D}_{22} & \mathcal{D}_{23} \\ \mathcal{D}_{31} & \mathcal{D}_{32} & \mathcal{D}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V 3x'_i x'_j \rho(\vec{r}') dV'$$

电多极矩



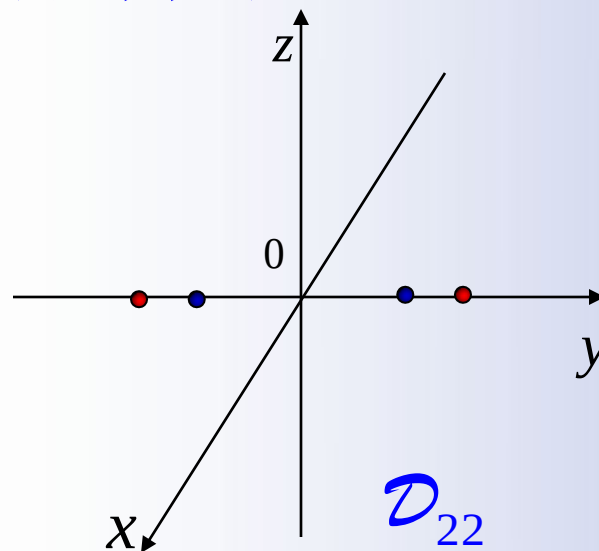
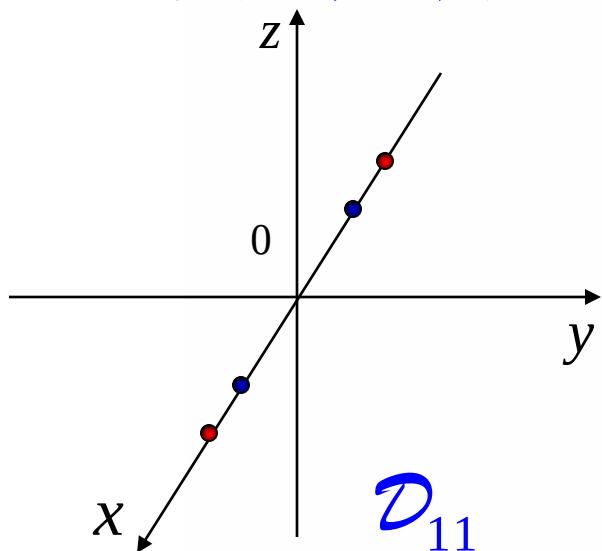
$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{33} &= 3Qb^2 - 3Qa^2 + 3Qb^2 - 3Qa^2 \\ &= 6Q(b - a)(b + a) = 6pl\end{aligned}$$

电多极矩

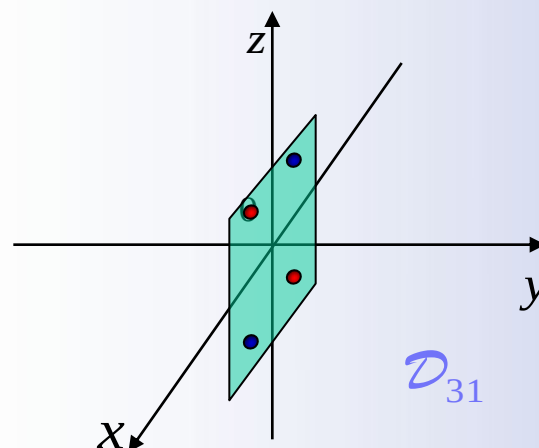
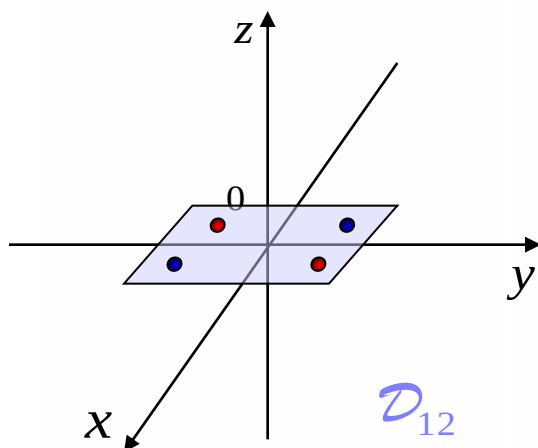
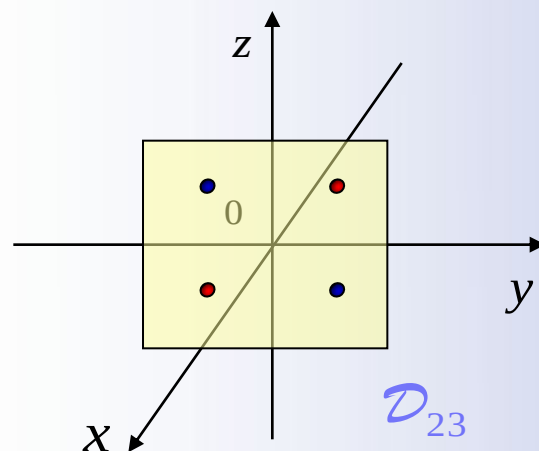
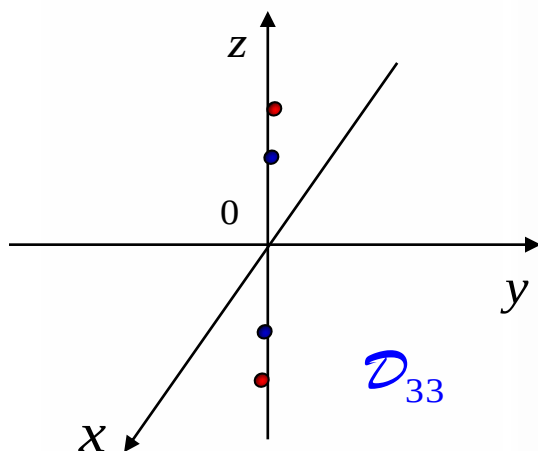
类似与电偶极矩可得：

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \mathcal{D}_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

电四极矩 几个分量的具体分布简化形式：



电多极矩



电多极矩

电四极矩张量只有五个独立量的证明：

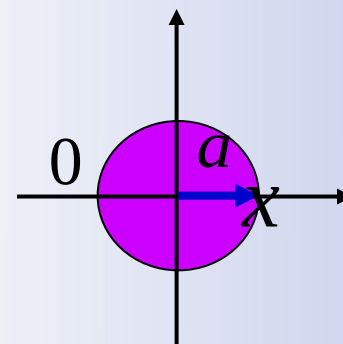
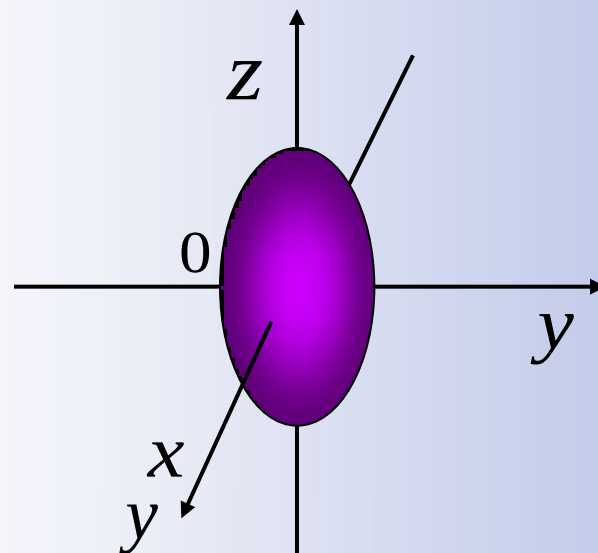
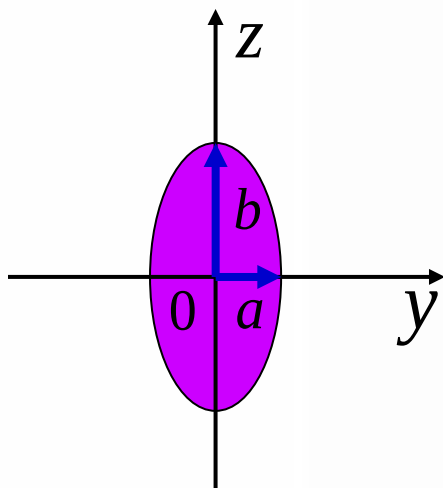
$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}|} = \sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \frac{1}{R} = 0$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\int 3r'^2 \left(\sum_{i,j} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{r}'|} \right) dV' = \mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33} = 0$$

电多极矩

例题：带电荷为 Q 的椭圆，
半长轴为 b ，半短轴为 a ，
求它的电四极矩和
远处的电势。



电 多 极 矩

上图椭球方程为: $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

椭球电荷密度为: $\rho_0 = 3Q/4\pi a^2 b$

根据电四极矩公式:

$$\mathcal{Q}_{ij} = \rho \int_V (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) dV'$$

电多极矩

分别可得: $\mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{23} = \mathcal{D}_{13} = 0$

$$\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}_{22} = -\frac{1}{5}(a^2 - b^2)Q$$

$$\mathcal{D}_{33} = \frac{2}{5}(a^2 - b^2)Q$$

近似电四极矩项的远处电势为:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{a^2 - b^2}{10} \frac{3\cos^2\theta}{R^3} \right)$$

由于电偶极矩为零。

电 多 极 矩

电荷体系在外电场中的能量:

$$W = \int \rho \varphi_e dV$$

电荷分布于小区域内, 取区域内适当点为坐标原点, 把 $\varphi_e(\bar{x})$ 对原点展开为:

$$\varphi_e(\bar{x}) = \varphi_e(0) + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_e(0) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi_e(0) + \cdots$$

电多极矩

展开式的第一项（自由电荷在外场的能量）：

$$W^{(0)} = Q\varphi_e(0)$$

展开式的第二项（电偶极矩在外场的能量）：

$$W^{(1)} = \vec{P} \cdot \nabla \varphi_e(0) = -\vec{P} \cdot \vec{E}_e(0)$$

展开式的第三项（电四极矩在外场的能量）：

$$W^{(2)} = -\frac{1}{6} D : \nabla \vec{E}_e$$

电 多 极 矩

非均匀场中四极子的能量才不为零。同时可根据电四极矩推出电荷的分布形状。

电偶极子在外电场的受力情况：

$$\vec{F} = -\nabla W^{(1)} = \nabla(\vec{P} \cdot \vec{E}_e) = \vec{P} \cdot \nabla \vec{E}_e$$

电偶极子在外电场的受力矩情况：

$$\vec{L} = \vec{P} \times \vec{E}_e$$

要点:

理解能用Green函数法求解的静电问题的情况;

了解点电荷的表示;

掌握Green公式;

对于第一类和第二类边界条件都能用Green公式求出势函数.

理解能用电多极矩法求解的静电问题的情况;

掌握电偶极矩、电四极矩产生的电势计算;
电四极矩只有五个独立量。