

第四章 电磁波的传播

Propagation of Electromagnetic Wave

本章所要研究的问题是：讯变情况下，电磁场的运动方式和规律。根据Maxwell方程，我们知道变化的电场和磁场可以互相激发，形成在空间中传播的电磁波。所以本章着重探讨的是电磁波的存在形式和运动方式。

本章主要内容

平面电磁波

电磁波在介质界面上的反射和折射

导体存在时的电磁波传播

波导和谐振腔

光学波导

等离子体

高斯光束

§ 4. 1平面电磁波

Plane Electromagnetic Wave

1、真空中电磁波的波动方程

介质中Maxwell方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

在没有电荷，没有电流的自由空间，

$\vec{j} = 0, \rho = 0$ ，并利用 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
可以得到齐次Maxwell方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

$\nabla \times (1)$ 可得:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B} \quad (6)$$

由(5)、(6)得

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

同样可得,

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

令: $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

我们可以得到真空中的波动方程:

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

由此可得, 真空中电磁场的传播速度为 c

2、定态波动方程

由介质的微观结构可知，对不同频率的介电常数是不同的，即 ε 和 μ 是角频率 ω 的函数

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, \omega) \quad \mu = \mu(\vec{x}, \omega)$$

在频率固定的情况下，介质中有关系

$$\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E} \quad \vec{B} = \mu(\omega) \vec{H}$$

因此，对于一定频率的电磁波，即定态电磁波的波动方程设频率为 ω 则有

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) \exp(-i\omega t)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) \exp(-i\omega t)$$

代入麦克斯韦方程组，整理可得

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} &= -i\omega \mu \epsilon \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= i\omega \nabla \times \vec{B} = i\omega(-i\omega \mu \epsilon) \vec{E} = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \end{aligned}} \right\}$$


$$-\nabla^2 \vec{E} = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}$$

令 $\omega^2 \mu \epsilon = k^2$

可得 $\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right.$ 亥姆霍兹方程

$\vec{B}$ 可由 $\vec{B} = \frac{-i}{\omega} \nabla \times \vec{E}$ 求出

归纳如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{B} = \frac{-i}{\omega} \nabla \times \vec{E} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = \frac{i}{\omega \mu \epsilon} \nabla \times \vec{B} \end{array} \right.$$

小结：电磁波在介质中的传播满足亥姆霍兹方程，其解即显示了电磁波在介质中如何传播。

3、平面电磁波

平面波定义：

波阵面与波矢垂直的平面，平面上的点相位相等。

亥姆霍兹方程：
$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

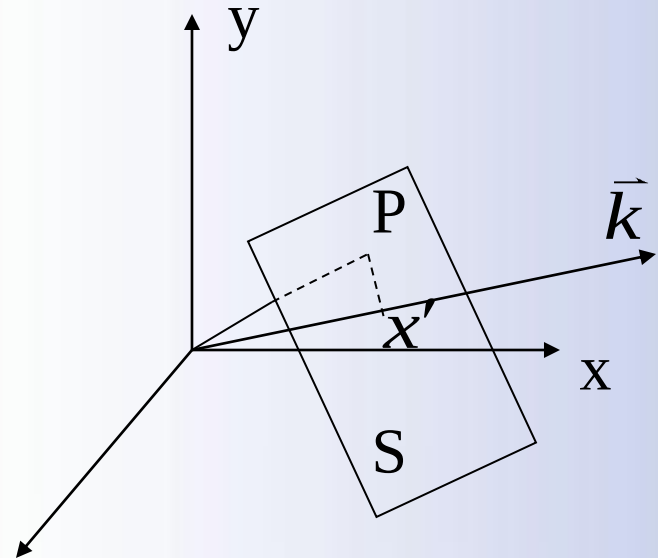
它的一个解是
$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

其中 $\vec{E}_0$ 是常矢量

场强的全表示式为

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

表示沿波矢 $\vec{k}$ 方向传播的平面波



图中 $\vec{k} \cdot \vec{x} = kx'$

所以S是等相面

以上为了计算方便，把场强表示成复数形式，实际存在的场强应理解为上式的实数部分。

实部： $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$

$\vec{k}$ 方向代表波传播的方向，数值 k 称为圆波数。

由于 $\vec{k} \cdot \vec{x} = kx'$ 沿电磁波传播方向相距为 $\Delta x' = 2\pi/k$ 的两点有相位差 2π ，因此这两点的距离即为波长 λ ，

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \longrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

对同一相位的演化

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = kx' - \omega t = A$$

$$x' = \frac{\omega}{k} t + \frac{A}{k}$$

得到相速度：

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v$$

在介质中，不同频率的电磁波具有不同的相速度，这就是介质的色散现象。

$$\because \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\therefore \vec{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \vec{E}_0 \cdot i\vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$



$$\vec{k} \perp \vec{E}$$

上式表明，平面电磁波是横波， $\vec{E}$ 可在垂直于 $\vec{k}$ 的任意方向上振荡。可以选取与 $\vec{k}$ 垂直的任意两个互相正交方向作为 $\vec{E}$ 的两个独立偏振方向。因此，每一个波矢量 $\vec{k}$ 存在两个独立的偏振波。

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{-i}{\omega} \nabla \times \vec{E} \\ &= \frac{-i}{\omega} i \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \rightarrow \begin{cases} \vec{E} \times \vec{B} // \vec{k} \\ \left| \frac{\vec{E}}{\vec{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v \end{cases}\end{aligned}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \vec{k} \cdot \left(\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \right) = 0 \rightarrow \boxed{\vec{B} \perp \vec{k}}$$

因此，磁场也垂直于波矢量 $\vec{k}$ ，即磁场也是横波， $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 和 $\vec{k}$ 是成右手螺旋，三个互相正交矢量，且 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 相位相同，振幅比为

$$\boxed{\left| \frac{\vec{E}}{\vec{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = v}$$

在真空中，平面电磁波的电场和磁场比值为

$$\left| \frac{\vec{E}}{\vec{B}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

注意：高斯
单位制中比
值为1

综上所述，平面电磁波有如下特征：

- (1) $\vec{E} \perp \vec{k}$ $\vec{B} \perp \vec{k}$ 电磁波为横波
- (2) $\vec{E} \perp \vec{B}$ $\vec{E} \times \vec{B} // \vec{k}$
- (3) $\vec{E}, \vec{B}$ 同相，比值为 v

注意：如果不是平面电磁波就没有上述的特征。

4、平面电磁波的能量和能流

电磁场的能量密度为

$$w = \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D})$$

在定态条件下 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

则

$$w = \frac{1}{2} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2)$$

在平面波条件下

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \longrightarrow \quad \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$$

即平面电磁波中电场能量密度和磁场能量密度相等，因此电磁场能量密度为：

$$w = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu} B^2$$

能流密度

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{E} \times \left(\frac{\vec{k}}{\mu\omega} \times \vec{E} \right) \\ &= \frac{\vec{k}}{\mu\omega} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\vec{k}}{k} E^2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \vec{n} w = w v \vec{n} \end{aligned}$$

该式说明能流密度的物理意义是带着能量沿着电磁波传播方向以速度 v 运动。

周期为T，能量密度平均值为 $\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt$

$$w = \varepsilon E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 [1 + \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]$$

可得

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2\mu} B_0^2$$

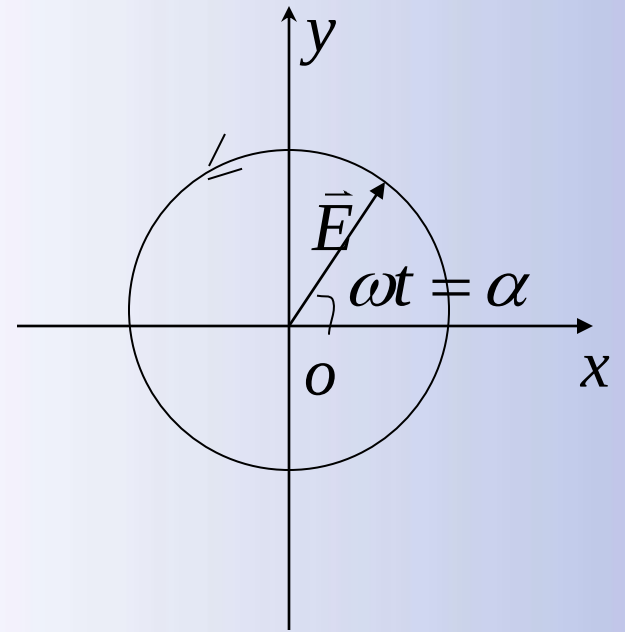
其中利用了 $\frac{1}{T} \int_0^T \cos 2(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) dt = 0$

平均能流密度 $\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \vec{n} = \bar{w} v \vec{n}$

例

$$\text{两波函数: } \vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x e^{i(k_z z - \omega t)},$$

$$\vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_y e^{i(k_z z - \omega t + \frac{\pi}{2})} = iE_0 \vec{e}_y e^{i(k_z z - \omega t)}$$



$$\text{合成后: } \vec{E} = E_0 (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\text{实部: } \vec{E} = E_0 [\cos(k_z z - \omega t) \vec{e}_x - \sin(k_z z - \omega t) \vec{e}_y] \quad \text{圆偏振}$$

$$\text{由: } \vec{B} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{n} \times \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \times \vec{E} = \frac{E_0}{c} (\vec{e}_y - i\vec{e}_x) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{e}_z$$

§ 4.2 单色平面电磁波在介质界面上的反射和折射

Reflection and Refraction of Monochromatic Plane Electromagnetic Wave at Interface of Medium

本节所要研讨的问题是：
用Maxwell电磁理论来分析在介质的分界面上，电磁波将发生的反射和折射规律。

关于反射和折射的规律包括两个方面：

(1) 运动学规律：

入射角、反射角和折射角的关系；

(2) 动力学规律：

入射波、反射波和折射波的振幅比和相对相位。

1、反射和折射定律（即相位关系）

Law of Reflection and Refraction (i.e. Phase Relation)

研究电磁波反射和折射问题的基础是电磁场在两个不同介质界面上的边值关系。

一般情况下，电磁场的边值关系为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha} \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{array} \right.$$

在介质的分界面上，通常没有自由电荷和传导电流，即

$$\sigma = 0 , \quad \vec{\alpha} = 0$$

因此，介质的分界面上的Maxwell's equations为：

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \end{cases}$$

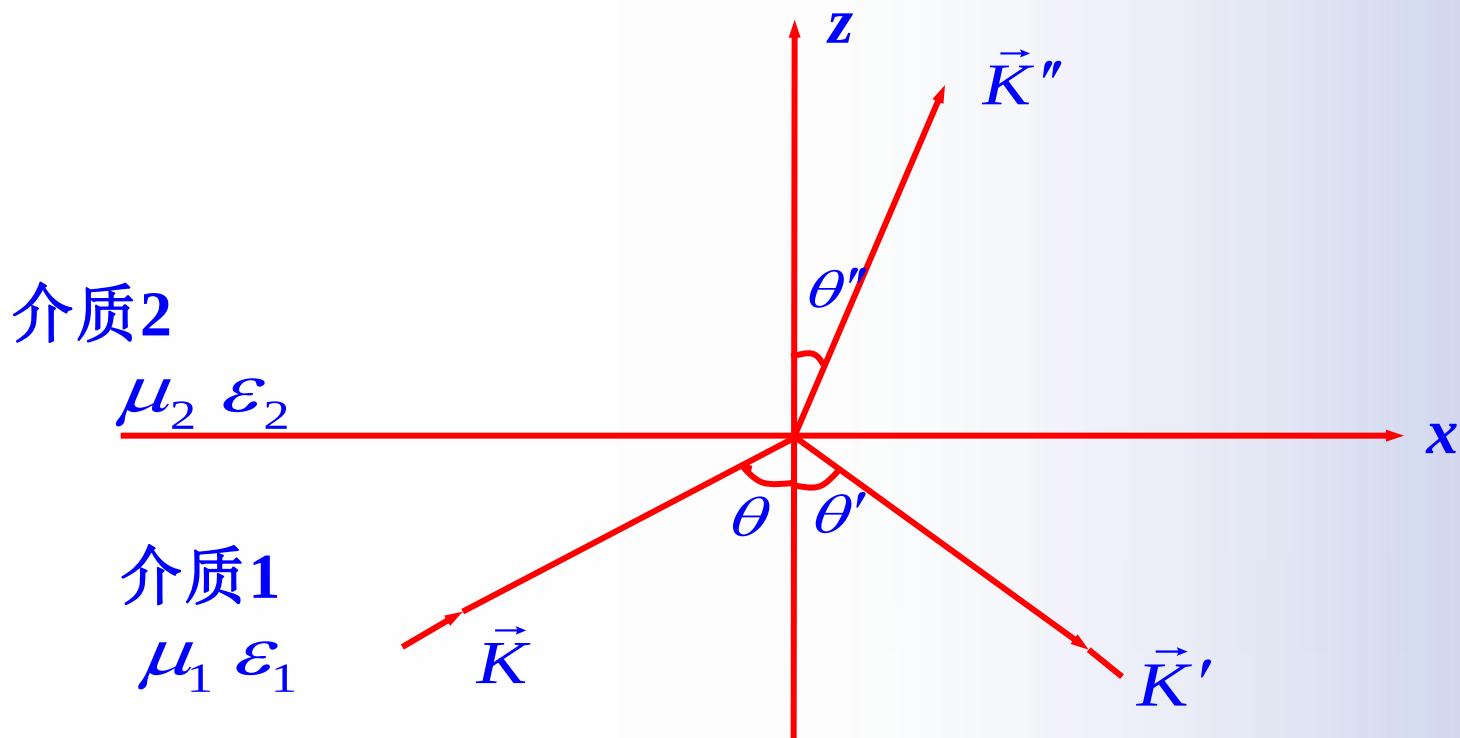
但是，在一定频率的情况下，这组边界方程（边值关系）**不是完全独立的**。因此，在讨论定态（一定频率）电磁波时，介质界面上的边值关系只取下列两式：

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \end{cases}$$

也就是说, $E_{2t} = E_{1t}$, $H_{2t} = H_{1t}$, 即切向连续性。

下面来讨论反射和折射定律:

假若所考虑的交界面为一平面, 即设 x - y 平面, 考虑一单色平面电磁波入射到交界面上, 设在 $z = 0$ 平面的上、下方的介质不同, 如图所示



设入射波、反射波和折射波的电场强度为 $\vec{E}$ 、 $\vec{E}'$ 和 $\vec{E}''$ ，波矢量分别为 $\vec{K}$ 、 $\vec{K}'$ 和 $\vec{K}''$ 。由Fourier频谱分析可知，反射波和折射波与入射波一样，

也是平面波。这样就可以把入射波、反射波和折射波写为：

$$\text{入射波} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\text{反射波} \quad \vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)}$$

$$\text{折射波} \quad \vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)}$$

同时由 $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 可得磁场矢量为

$$\text{入射波} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\text{反射波} \quad \vec{B}' = \vec{B}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)} = \frac{1}{\omega'} \vec{k}' \times \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)}$$

$$\text{折射波} \quad \vec{B}'' = \vec{B}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} = \frac{1}{\omega''} \vec{k}'' \times \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)}$$

在 $z=0$ 的平面上有一些边界条件，该平面上的一切点必须永远满足这些边界条件。这个事实意味着：在 $z=0$ 处，所有场的空间和时间变化必须相同。因此，**所有的相因子在 $z=0$ 处必须相等**，即在边界面上 $E_{2t}=E_{1t}$ ，所以

$$\left[E_{0t} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + E'_{0t} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)} \right] \Big|_{z=0} \\ = E''_{0t} e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} \Big|_{z=0}$$

要使该式成立，只有

$$\left[E_{0t} + E'_{0t} \right] \Big|_{z=0} = E''_{0t} \Big|_{z=0} \quad \text{以及}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t \Big|_{z=0} = \vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t \Big|_{z=0} = \vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t \Big|_{z=0}$$

因为 x 、 y 、 t 都是独立变量，而且要求

$$\begin{aligned} k_x x + k_y y - \omega t &= k'_x x + k'_y y - \omega' t \\ &= k''_x x + k''_y y - \omega'' t \end{aligned}$$

必然有：

$$\omega = \omega' = \omega''$$

$$k_x = k'_x = k''_x$$

$$k_y = k'_y = k''_y$$

讨论:

a) $\omega = \omega' = \omega''$ ，这说明反射波、折射波的频率与入射波的频率相同。

b) 根据 $k_y = k'_y = k''_y$ ，假若 $k_y = 0$ ，则必有 $k'_y = k''_y = 0$ 。这说明反射波和折射波与入射波在同一平面内，这个面就称为入射面（入射波矢 $\vec{k}$ 与分界面的法线 $\hat{n}$ 所组成的平面）。

c) 根据 $k_x = k'_x$ ， $|\vec{k}| = |\vec{k}'| = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$ ，有

$$k \sin \theta = k' \sin \theta'$$

由此得到： $\theta' = \theta$ ，即反射角=入射角。（反射定律）

d) 根据 $k_x = k_x''$, 有

$$k_x = k \sin \theta, \quad k_x'' = k'' \sin \theta'', \quad |\vec{k}| = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}, \quad |\vec{k}''| = \omega'' \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$$

$$k \sin \theta = k'' \sin \theta''$$

则

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{k''}{k} = \frac{\omega'' \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

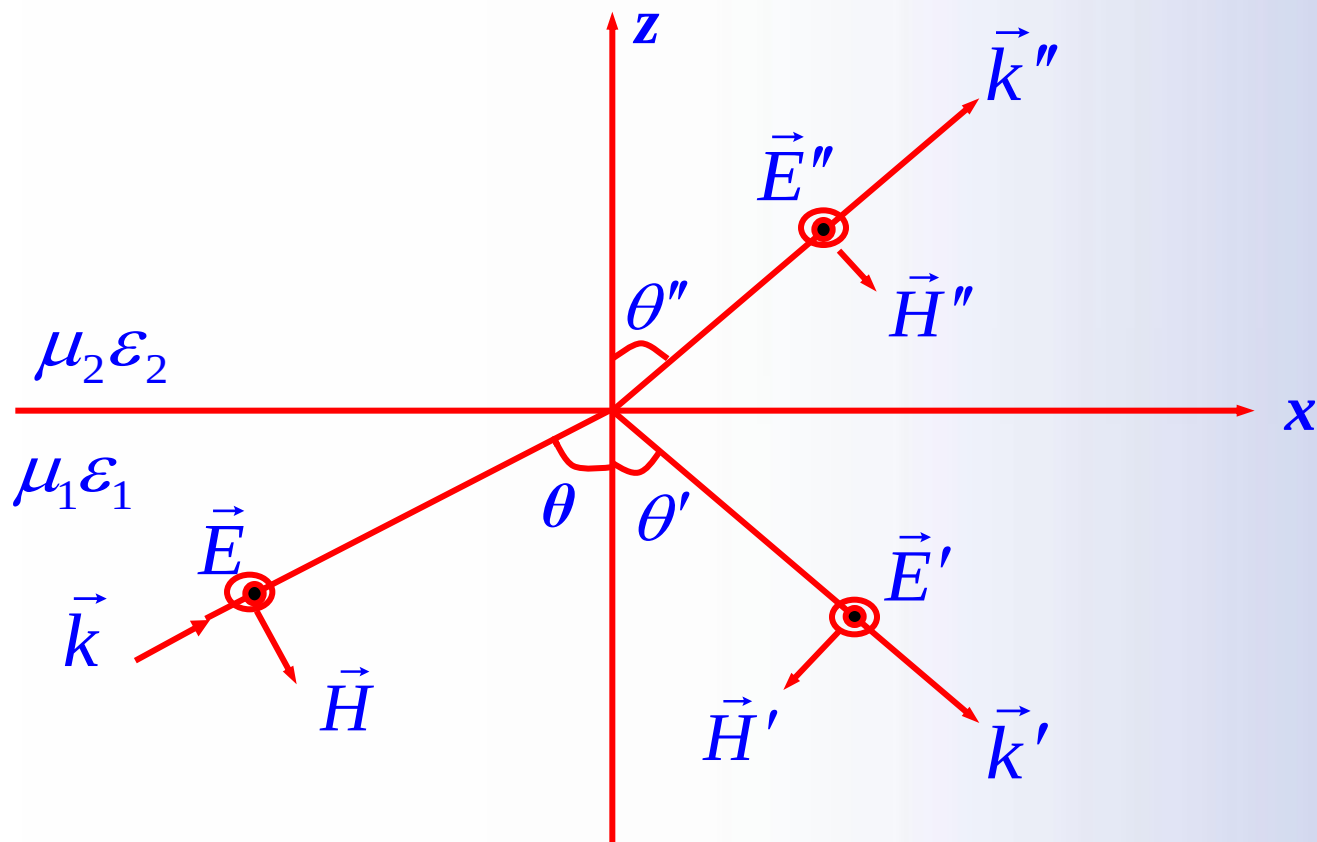
这就是折射定律，其中 n_{21} 为介质2相对于介质1的折射率，一般介质 $\mu \approx \mu_0$ (除铁磁质外)，故 $\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ 为两介质的相对折射率。

2、菲涅耳公式（即振幅关系）

Fresnel's Formula (i.e. Amplitude Relation)

所谓菲涅耳公式就是在边值关系条件下求得的入射波、反射波和折射波的振幅关系。由于对每一个波矢 $\vec{k}$ 有两个独立的偏振波，所以我们只需要分别讨论电场 $\vec{E} \perp$ 入射面和电场 $\vec{E} \parallel$ 入射面两种情况就可以了。

a) $\vec{E} \perp$ 入射面



这时电场只有y分量，并 $\perp$ 入射面（纸面）指向外面，以 $\odot$ 表示。因为介质1中有入射波和反射波，介质2中只有折射波，因此根据边界条件（边值关系）：

$$\text{由 } E_{2t} = E_{1t}, \quad \text{有 } E_0 + E'_0 = E''_0 \quad \text{①}$$

$$\text{由 } H_{2t} = H_{1t}, \quad \text{有 } H_{0X} + H'_{0X} = H''_{0X}$$

$$\text{即} \quad H_0 \cos \theta - H'_0 \cos \theta' = H''_0 \cos \theta''$$

$$\text{考虑到 } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E}, \quad |\vec{k}| = |\vec{k}'| = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$$

$$|\vec{k}''| = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \quad \theta' = \theta$$

故有
$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0 - E'_0) \cos \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E''_0 \cos \theta'' \quad (2)$$

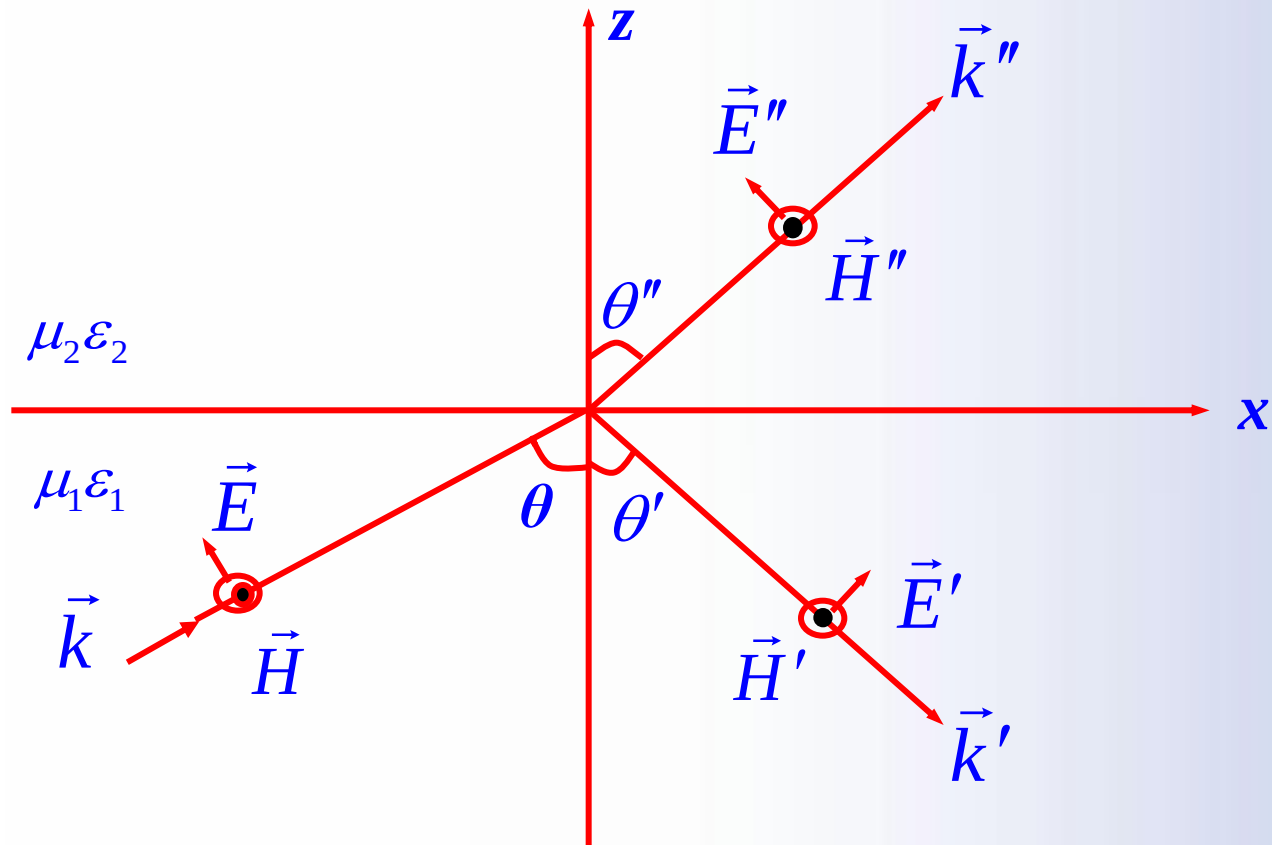
联立①、②两式得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta''} \\ \frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta''} \end{array} \right.$$

对于光波, $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ 即有

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} &= \frac{\cos \theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \theta''}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \theta''} = \frac{\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \cos \theta''}{\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} \cos \theta''} \\ &= -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \\ \frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}} &= \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos \theta''} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')}\end{aligned}$$

b) $\vec{E} \parallel$ 入射面



这时磁场只有y分量，并 $\perp$ 入射面（纸面）指向外面，以 $\odot$ 表示。由边界条件，即在 $z=0$ 的界面上有：

$$\begin{cases} E_{0X} + E'_{0X} = E''_{0X} \\ H_0 + H'_0 = H''_0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} E_0 \cos \theta - E'_0 \cos \theta' = E''_0 \cos \theta'' \\ H_0 + H'_0 = H''_0 \end{cases}$$

同理由 $\vec{H} = \frac{1}{\mu\omega} \vec{k} \times \vec{E}$ 的关系，把上式中的磁场换为

电场。

从而得到：

$$\begin{cases} (E_0 - E'_0) \cos \theta = E''_0 \cos \theta'' \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E_0 + E'_0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E''_0 \end{cases}$$

联合上述两式即得：

$$\begin{cases} \frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{\cos \theta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} - \cos \theta'' \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}}{\cos \theta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} + \cos \theta'' \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} \\ \frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{2 \cos \theta \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}}{\cos \theta \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} + \cos \theta'' \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}} \end{cases}$$

对于光波, $\mu_1 \cong \mu_2 \cong \mu_0$ 则有

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - \cos \theta''}{\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \cos \theta''} = \frac{\cos \theta \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} - \cos \theta''}{\cos \theta \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} + \cos \theta''} \\&= \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta'' \cos \theta''}{\sin \theta \cos \theta + \sin \theta'' \cos \theta''} = \frac{\sin(\theta - \theta'') \cos(\theta + \theta'')}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \\&= \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} + \cos \theta''} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} + \cos \theta''} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin \theta \cos \theta + \sin \theta'' \cos \theta''}\end{aligned}$$

综上所述，我们得到的振幅关系就是光学中的菲涅耳公式。因此，这也有有力地证示了光是电磁波的理论学说，即光实际上是在一个特殊频段（波长由4000 Å 到8000 Å）的电磁波。

菲涅耳公式讨论：

▲ 对于垂直偏振：即 $\theta + \theta'' = 90^\circ$

当 $\theta'' + \theta = 90^\circ$ 时， $E'_{0\parallel} = 0$ ， $E'_{0\perp} \neq 0$ ，即反射波中没有电场平行入射面的部分，这时的反射波是完全的线偏振波，此时的 $\theta'' = ?$

根据 $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{\sin \theta}{\sin(90^\circ - \theta)} = n_{21}$ ，令此时的 $\theta = \theta_b$

则有 $\frac{\sin \theta_b}{\sin(90^\circ - \theta_b)} = \frac{\sin \theta_b}{\cos \theta_b} = \tan \theta_b$

故 $\theta_b = \tan^{-1} n_{21}$ 这个角称为 **Brewster's angle**。

由此可见，一个任意偏振的波，总可以分为平行和垂直入射面的两个入射波。平面波以布儒斯特角入射时，反射波只有垂直入射面偏振的波，反射波和折射波传播方向互相垂直。

▲当平面波从光疏介质入射到光密介质时（即 $n_{21} > 1$ ）。根据折射定律，有 $\sin \theta = n_{21} \sin \theta''$ ，可知 $\theta'' < \theta$ ，光线向法线方向偏折。这时从菲涅耳公式可看出：

$$\vec{E} \perp \text{入射面时: } \frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} < 0$$

$$\vec{E} \parallel \text{入射面时: } \frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}$$

当 $\theta + \theta'' > \frac{\pi}{2}$ 时: $\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} < 0$ 所以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, E 反向
 而当 $\theta + \theta'' < \frac{\pi}{2}$ 如垂直入射 $\theta = 0$ 时: $\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} > 0$

从实际光反射效果看, 也是E反向。

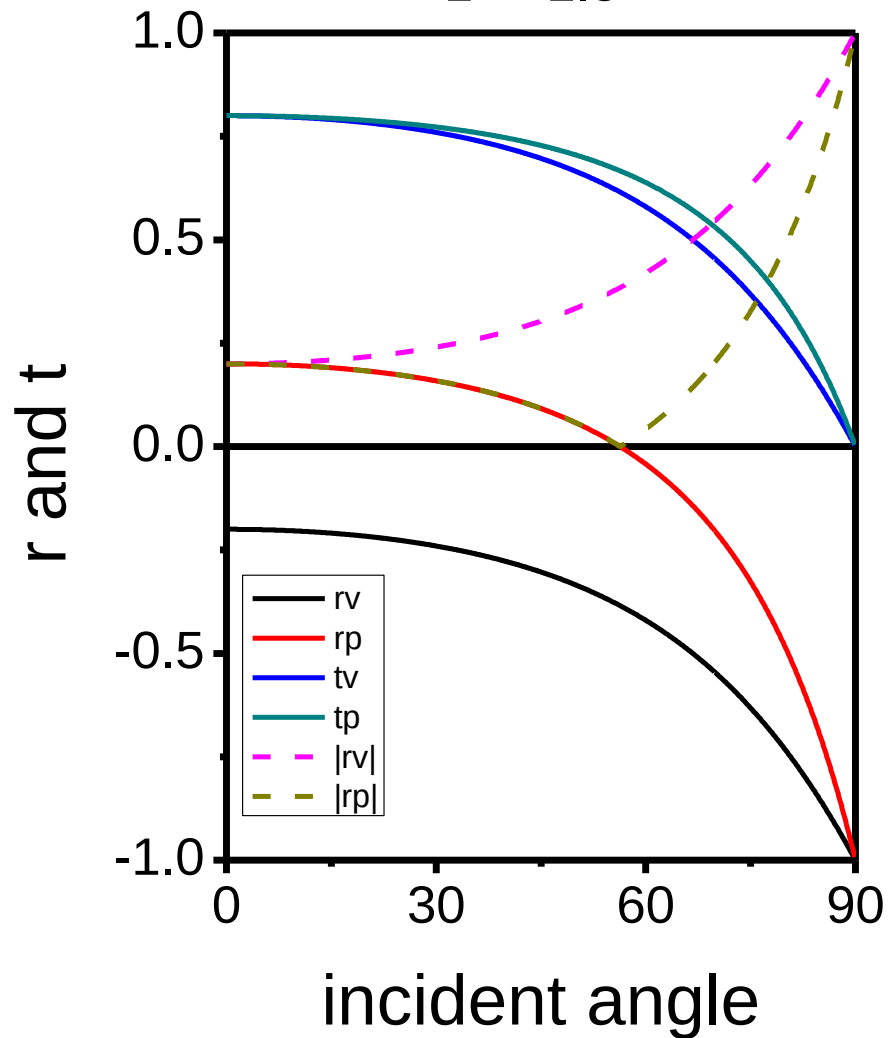
由此看出, 即反射波与入射波位相相差 π , 好象差个半波长, 这种现象称为**半波损失**。

当**平面波从光密介质入射到光疏介质**时, 反射波与入射波同位相, 即没有半波损失。

$$\theta'' > \theta, \frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} > 0; \theta + \theta'' < \frac{\pi}{2}, \frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} < 0 \text{ 反之亦然}$$

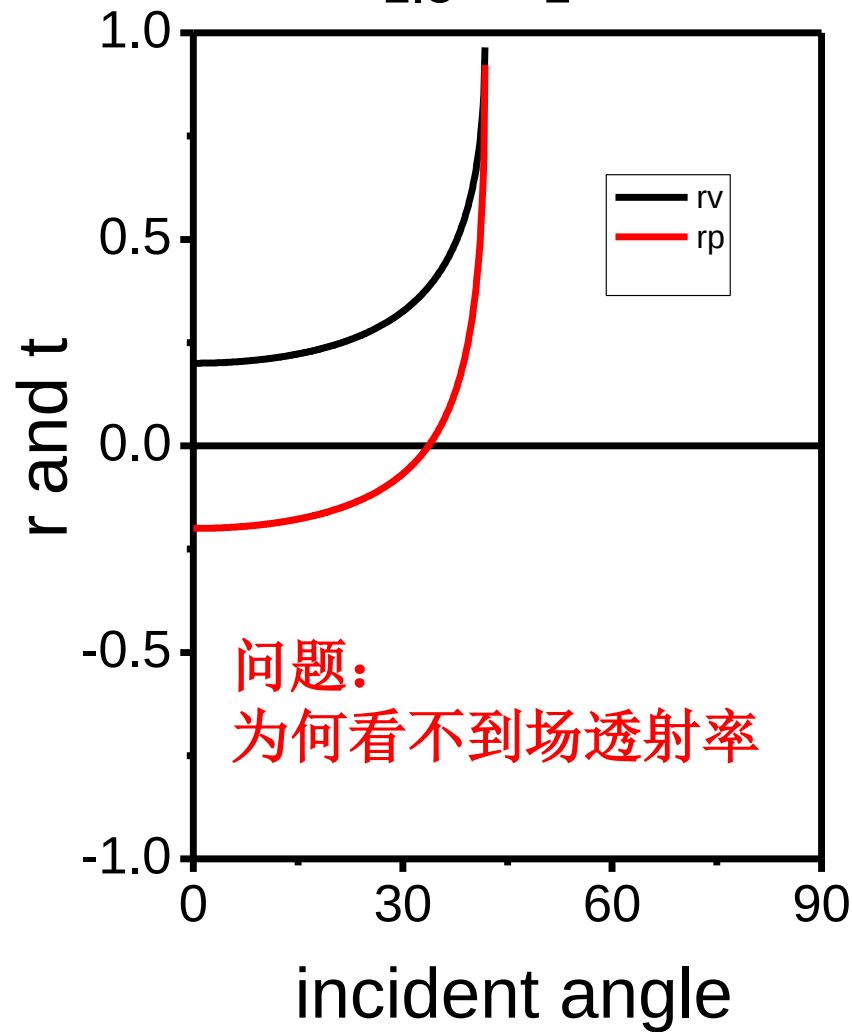
光疏 $\rightarrow$ 光密

1 $\rightarrow$ 1.5



光密 $\rightarrow$ 光疏

1.5 $\rightarrow$ 1



问题：
为何看不到场透射率

5) 由菲涅耳公式可以计算电磁波的反射系数和透射系数。

反射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为反射系数，即以 R 表示之。

折射波平均能流与入射波平均能流在法线方向的分量之比称为透射系数，即以 T 表示之。

$\vec{E} \perp$ 入射面：入射波的能量平均值：

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\perp\lambda} &= \frac{1}{2} R_e(\vec{E} \times \vec{H}^*) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{0\perp}^2 \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\end{aligned}$$

反射波的能量平均值：

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\perp\text{反}} &= \frac{1}{2} R_e(\vec{E}' \times \vec{H}'^*) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{0\perp}'^2 \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{0\perp}'^2 \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}|}\end{aligned}$$

折射波的能量平均值:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\perp\text{折}} &= \frac{1}{2} R_e(\vec{E}'' \times \vec{H}''^*) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{0\perp}''^2 \frac{\vec{k}''}{|\vec{k}''|}\end{aligned}$$

从而得到:

$$\left\{ \begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{\vec{S}_{\perp\text{反}} \cdot \hat{n}}{\vec{S}_{\perp\text{入}} \cdot \hat{n}} = \frac{|E'_{0\perp}|^2}{|E_{0\perp}|^2} = \frac{\sin^2(\theta - \theta'')}{\sin^2(\theta + \theta'')} \\ T_{\perp} &= \frac{\vec{S}_{\perp\text{折}} \cdot \hat{n}}{\vec{S}_{\perp\text{入}} \cdot \hat{n}} = \frac{n_2 \cos \theta'' |E_{0\perp}''|^2}{n_1 \cos \theta |E_{0\perp}|^2} = \frac{\sin 2\theta \sin 2\theta''}{\sin^2(\theta + \theta'')} \end{aligned} \right. \quad \theta=0 \text{时?}$$

同理可得： $\vec{E} \parallel$ 入射面：

$$\begin{cases} R_{\parallel} = \frac{|E'_{0\perp}|^2}{|E_{0\perp}|^2} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}^2(\theta + \theta'')} \\ T_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta \sin 2\theta''}{\sin^2(\theta + \theta'') \cos^2(\theta - \theta'')} \end{cases}$$

根据能量守恒定律，容易证明：

$$\begin{cases} R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \\ R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \end{cases}$$

3、全反射 (Total Reflection)

若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 则 $n_{21} < 1$, 说明 $\frac{\sin \theta}{\sin \theta''} < 1$ 即电磁波从介质1入射时, 折射角 $\theta'' > \theta$ 。

当 $\theta'' = \frac{\pi}{2}$ 时, 则 $\sin \theta = n_{21} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$, 这时折射波沿界面掠过, 此时的入射角为 θ_0 。即

$$\theta_0 = \sin^{-1}(n_{21})$$

此称为全反射临界角 (Total Reflection Critical Angle), 即入射波以 θ_0 入射时的反射为全反射, 没有折射波出现。

如果再增大入射角, 使得 $\theta > \theta_0$, 即 $\sin \theta > n_{21}$

假设在 $\sin \theta > n_{21}$ 情形下两介质中的电场形式仍然为

$$\vec{E}(\vec{x} \cdot \vec{t}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

则根据边值关系确定的表示式

$$k_x = k'_x = k''_x, \quad k_y = k'_y = k''_y$$

形式上仍然成立，即仍有

$$k_x = k''_x \rightarrow k''_x = k_x = k \sin \theta$$

$$\left. \begin{array}{l} k = k' = \frac{\omega}{v_1} \\ k'' = \frac{\omega}{v_2} \end{array} \right\} \rightarrow k'' = k \frac{v_1}{v_2} = k n_{21}$$

即由此可见，在 $\sin \theta > n_{21}$ 情形下有 $k_x'' > k''$ 因而

$$\begin{aligned} k_z'' &= \sqrt{k''^2 - k_x''^2 - k_y''^2} \\ &= \sqrt{k''^2 - k_x''^2} \quad \text{--- } \mathbf{0} \\ &= \sqrt{k^2 n_{21}^2 - k^2 \sin^2 \theta} \\ &= ik \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2} \end{aligned}$$

这表明 k_z'' 是一虚数，令

$$k_z'' = i\alpha, \quad \alpha = k \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}$$

故折射波的传播因子为：

$$e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x})} = e^{i(k_x''x + k_z''z)}$$

这里 $k_x'' = k_x = k \sin \theta$, $k_z'' = i\alpha$

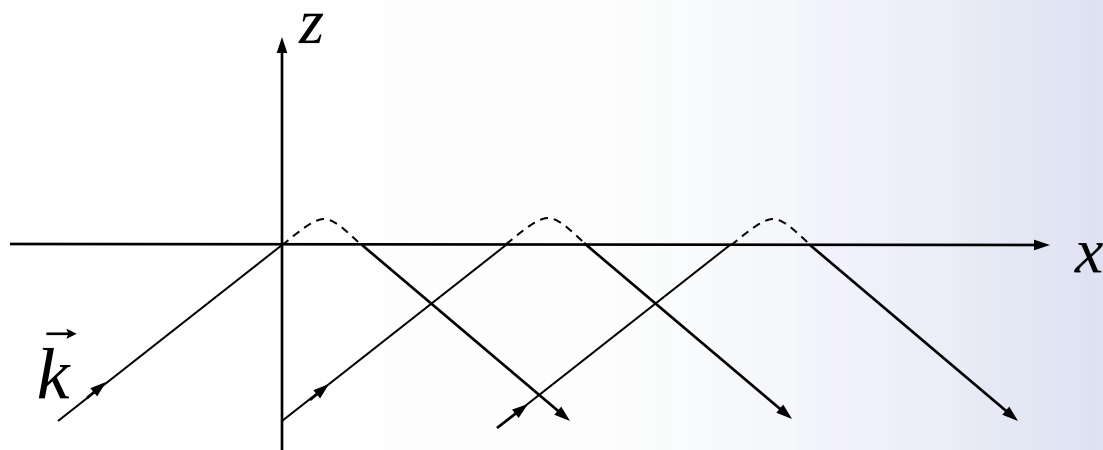
即

$$\begin{aligned} e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x})} &= e^{ik_x \sin \theta x + ik_z'' z} \\ &= e^{ik_x \sin \theta x} e^{-\alpha z} \end{aligned}$$

从而可得折射波的电场能量为：

$$\begin{aligned}
 \vec{E}'' &= \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} \\
 &= \vec{E}_0'' e^{i(k_x'' x + k_z'' z - \omega t)} \\
 &= \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(k x \sin \theta - \omega t)}
 \end{aligned}$$

该式表明折射波将沿 z 方向衰减，沿 x 方向传播。因此，在全反射时，介质2中的电磁波并不为零，如果介质2的电磁波完全为零的话，那么就不满足边值关系。可见电场不仅沿着界面方向传播，而且被限制在表面附近的一个区域内，所以称全反射时的折射波为表面波。



通过对分界面内侧（即折射波）的坡印亭矢量的法向分量对时间平均值的计算，我们得到即使在介质2中有电场存在，显然也没有能量流过分界面。即：

$$\begin{aligned}\overline{S_z''} &= \overline{\vec{S}'' \cdot \hat{n}} = \frac{1}{2} R_e \left[\hat{n} \cdot (\vec{E}'' \times \vec{H}''^*) \right] \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_2} R_e \left[(\hat{n} \cdot \vec{k}'') |E_0''|^2 \right]\end{aligned}$$

其中 $\vec{H}'' = \frac{1}{\mu_2\omega} \vec{k}'' \times \vec{E}''$

但是, $\hat{n} \cdot \vec{k}'' = k'' \cos\theta'' = k_z''$ 为一纯虚数,

故

$$\overline{S_z''} = \overline{\vec{S}'' \cdot \hat{n}} = 0 \quad .$$

在全反射情况下：（套用菲涅耳公式）

$$\sin \theta'' \rightarrow \frac{k_x''}{k''} = \frac{\sin \theta}{n_{21}}$$

$$\cos \theta'' \rightarrow \frac{k_z''}{k''} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1}$$

▲ 当 $\vec{E}_\perp$ 入射面时:

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} &= \frac{\cos \theta - i\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\cos \theta + i\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \\&= \frac{[\cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - n_{21}^2)] - i2\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{1 - n_{21}^2} \\&= e^{-i2\phi}\end{aligned}$$

根据指数表达式

$$\begin{aligned}e^{-i2\phi} &= \cos 2\phi - i \sin 2\phi \\&= (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - i2 \sin \phi \cos \phi\end{aligned}$$

比较上式，可得

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - n_{21}^2}} \\ \sin \phi = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\sqrt{1 - n_{21}^2}} \end{cases}$$

故有

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\cos \theta}$$

该式表示在全反射时，入射波和反射波振幅相同，两者存在相位差 2ϕ 。

▲ 当 $\vec{E} \parallel$ 入射面时:

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{n_{21} \cos \theta - i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1}}{n_{21} \cos \theta + i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n_{21}^2} - 1}} \\&= \frac{n_{21} \cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{n_{21} \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}} \\&= \frac{[n_{21}^4 \cos^2 \theta - (\sin^2 \theta - n_{21}^2)] - i 2 n_{21}^2 \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{n_{21}^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - n_{21}^2} \\&= e^{-i 2 \psi}\end{aligned}$$

比较指数表达式:

$$\begin{aligned} e^{-i2\psi} &= \cos 2\psi - i \sin 2\psi \\ &= (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) - 2i \cos \psi \sin \psi \end{aligned}$$

可见
$$\begin{cases} \cos \psi = \frac{n_{21}^2 \cos \theta}{\sqrt{n_{21}^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - n_{21}^2}} \\ \sin \psi = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{\sqrt{n_{21}^4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - n_{21}^2}} \end{cases}$$

故有:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta}$$

▲比较 ψ 和 ϕ ，可见 $\Delta = \psi - \phi \neq 0$ ，并与入射角有关，如果入射波是线偏振波，但其振动方向与入射面成一定夹角，则反射波的两个分量将有一个位相差，因而是一个椭圆偏振波，即一个线偏振波入射在介质界面上经过反射成了一个椭圆偏振波。

§ 4.3 有导体存在时电磁波的传播

Electromagnetic Wave Propagation in Conduction Medium

本节所要研讨的问题是：导电介质中的电磁波的传播。由于导体内有自由电荷存在，在电磁波的电场作用下，自由电荷运动形成传导电流，而传导电流要产生焦耳热，使电磁波能量有损耗。由此可见，在导体内部的电磁场（波）是一种衰减波，在传播过程中，电磁能量转化为热量。

1、导体内的自由电荷的分布

根据焦耳定律的微分形式

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

和电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

以及电场的 Gauss 定理

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$$

解此微分方程，得

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

式中 ρ_0 是 $t=0$ 时的电荷密度。

由此可见，电荷密度 ρ 随时间指数衰减，衰减的特征时间为

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

通常 10^{-17}s

因此，只要电磁波的频率满足

$$\omega \ll \tau^{-1} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

或者 $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$ （这就是良导体条件）

2、导体内的单色平面电磁波

导电介质与非导电介质的根本区别在于导电介质中有自由电荷存在。因而，只要有电磁波存在，总要引起传导电流 $\vec{j}$ 。导体中的自由电荷一般都分布在导体表面。因此，导体内部：

$$\rho = 0, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

则Maxwell equ's为:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

对一定频率 ω 的电磁波, 可令 $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$

则有

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} = -i\omega\varepsilon'\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$$

从形式上看，与均匀介质中的情况完全相同，且得 $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = i\omega\mu\nabla \times \vec{H} \longrightarrow \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \varepsilon' \vec{E} = 0$

$$-i\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E}$$

位移电流
与电场相差 $\pi/2$ 相位
不消耗功率

传导电流
与电场同相
耗散功率密度

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J}^* \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \sigma E_0^2$$

由
这里也令
故有
同理可得:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon' \vec{E} = 0$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon'$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

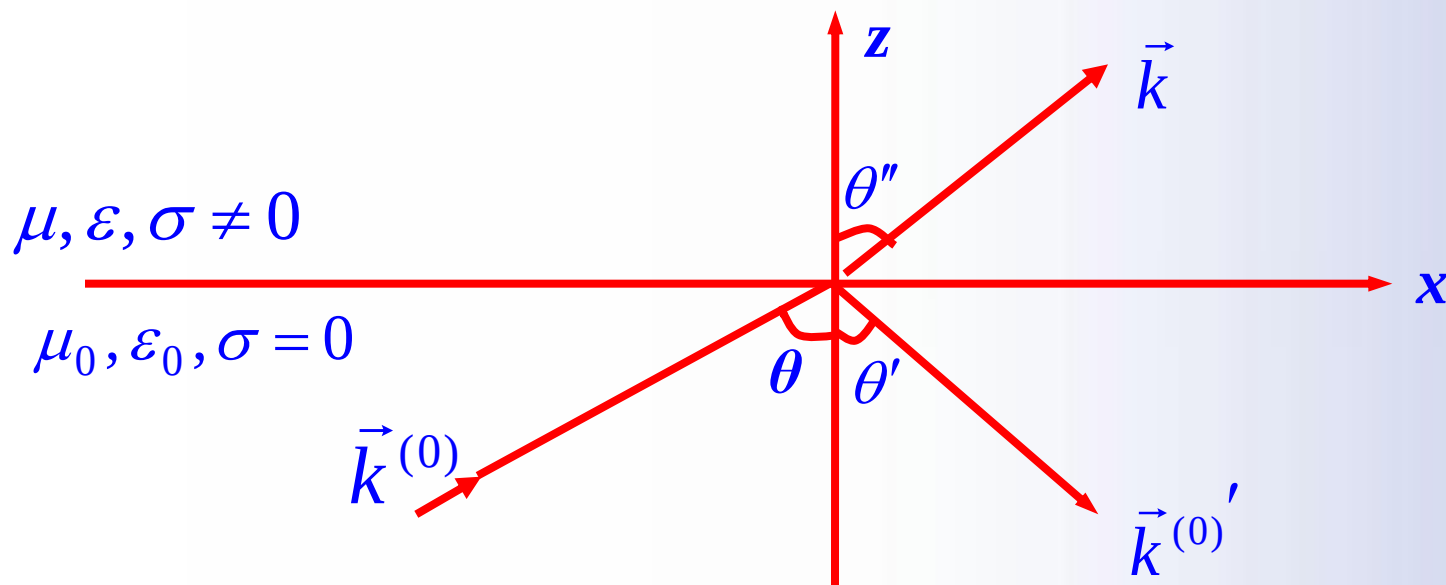
运动方程

如果令 $\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$ 称之为复波数。

可得

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \end{cases}$$

当电磁波从真空中入射到导体表面时，以 $\vec{k}^{(0)}$ 矢量表示真空中的波矢， $\vec{k}$ 表示导体内的波矢,即：



根据边值关系：

$$(a) : \quad k_x^{(0)} = k_x^{(0)'} = k_x$$

真空中 $\vec{k}^{(0)}$ 为实数，其值为

$$k^{(0)} = k^{(0)'} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

而 $k_x = \beta_x + i\alpha_x, \quad k_x^{(0)} = k^{(0)} \sin \theta$

因此 $\beta_x + i\alpha_x = k_x^{(0)} = k^{(0)} \sin \theta$

由此可得

$$\begin{cases} \beta_x = k_x^{(0)} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sin \theta \\ \alpha_x = 0 \end{cases}$$

(b): $k_y^{(0)} = k_y^{(0)'} = k_y = 0$

所以

$$k_y = \beta_y + i\alpha_y = 0$$

即得

$$\begin{cases} \beta_y = 0 \\ \alpha_y = 0 \end{cases}$$

(c): $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y + \alpha_z \beta_z$

$$= \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma$$

又因为良导体条件下，可知 $\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \gg 1$ ，而

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + i2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon' = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

$$= \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right) \cong i \omega \mu \sigma$$

总上可得:

$$\beta^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\alpha_z^2 = \beta_x^2 + \beta_z^2$$

而 $\alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$

$$\gg \frac{1}{2} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (k_x^{(0)})^2 = \frac{1}{2} (\beta_x)^2$$

可得

$$\begin{cases} \alpha_z = \beta_z = \sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \sigma} \\ \beta_z \gg \beta_x \end{cases}$$

3、趋肤效应和穿透深度

对于良导体有

$$\begin{cases} \beta = \beta_z \\ \alpha = \alpha_z \end{cases}$$

根据

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \\ \alpha \beta = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \end{cases}$$

可求得

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} + 1 \right]}.$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right]}.$$

则此时的电磁场形式为：

$$\vec{E}'' = \vec{E}_0'' e^{-\alpha \hat{n} \cdot \vec{x}} e^{i(\beta \hat{n} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{H}'' = \vec{H}_0'' e^{-\alpha \hat{n} \cdot \vec{x}} e^{i(\beta \hat{n} \cdot \vec{x} - \omega t)}.$$

讨论:

a) 从电磁场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 形式中可看到, 复数波矢量 $\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$, 实质上包含了两个部分: 实部 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ 就是通常意义上的波矢量, 而虚部 α 反映着电磁波在进入导体以后的衰减程度。

b) 波振幅沿传播方向按指数衰减, α 为衰减常数。把波振幅降至原值的 $\frac{1}{e}$ 时传播的距离称为穿透深度, 以 δ 表示, 即

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

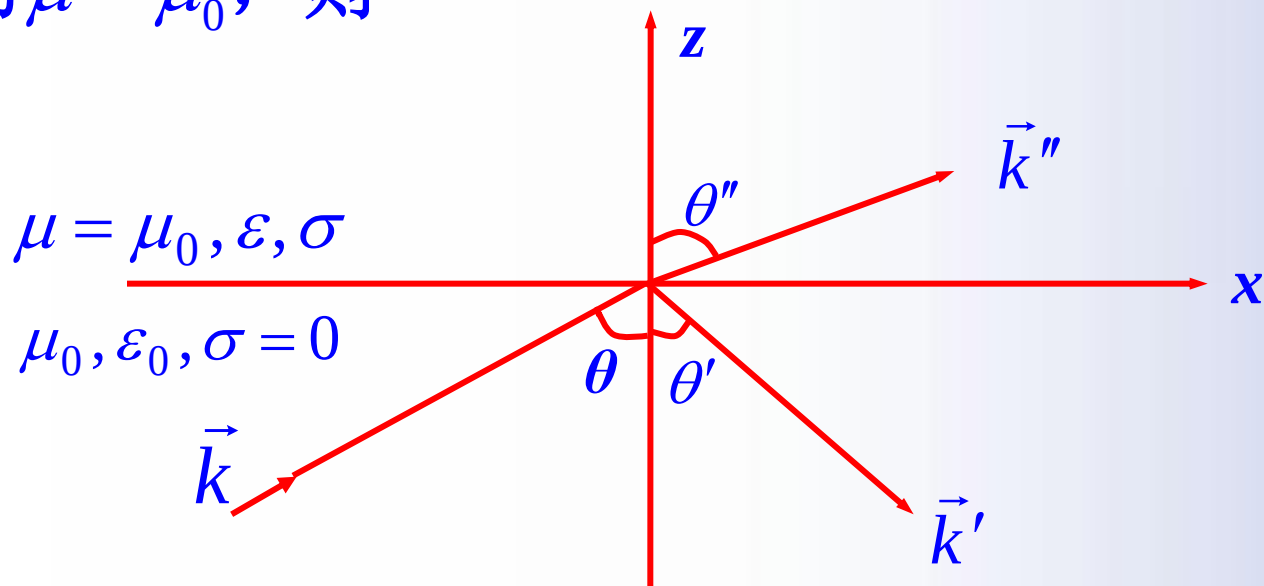
c) 相速度 $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\beta}$ ，由此可见，在导体中传播速度由 β 决定， β 称为相位常数(波数)，波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\beta}$ ，与导电率有关，所以在导体中波长变短了。

e) 在良导体中， $\alpha \cong \beta \cong \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$ ，且电磁场的关系为：

$$\begin{aligned}\vec{H}'' &= \frac{1}{\omega\mu} \vec{k} \times \vec{E}'' = \frac{1}{\omega\mu} (\beta + i\alpha) \hat{n} \times \vec{E}'' \\ &= \frac{1}{\omega\mu} \sqrt{\omega\mu\sigma} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \hat{n} \times \vec{E}'' = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \hat{n} \times \vec{E}''.\end{aligned}$$

4、电磁波在导体表面上的反射

若电磁波从真空斜射到金属表面，并设金属中的 $\mu = \mu_0$ ，则



其中 $k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. $k'' = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon'}$

$$\sin \theta'' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'}} \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \cos \theta'' &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta''} = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 \sin^2 \theta}{\varepsilon'}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_0 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

由菲涅耳公式得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon'} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon'} \cos \theta''} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_0 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_0 \sin^2 \theta}} \\ \frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon'} \cos \theta''} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_0 \sin^2 \theta}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{\sqrt{\varepsilon'} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta''}{\sqrt{\varepsilon'} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta''} = \frac{\sqrt{\varepsilon'} \cos \theta - \sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 \sin^2 \theta}{\varepsilon'}}}{\sqrt{\varepsilon'} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 \sin^2 \theta}{\varepsilon'}}} \\ \frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{2 \cos \theta \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta'' + \sqrt{\varepsilon'} \cos \theta} = \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon'} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0 \sin^2 \theta}{\varepsilon'}}} \end{aligned} \right.$$

若电磁波从真空垂直入射到金属表面，即

$$\theta = \theta' = \theta'' = 0$$

故反射波和入射波的振幅之比为：

那么有

$$\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon'}} = \frac{k - k''}{k + k''}$$

$$\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} = \frac{\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon'} + \sqrt{\varepsilon_0}} = -\frac{k - k''}{k + k''}$$

对于良导体, $\frac{\sigma}{\varepsilon\omega} \gg 1$, 从而由 $k'' = \beta + i\alpha = \frac{1+i}{\delta}$

其中 $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} &= \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} - \frac{1+i}{\delta}}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} + \frac{1+i}{\delta}} = \frac{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\delta - 1 - i}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\delta + 1 + i} \\ &= -\frac{1+i - \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}}{1+i + \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}}\end{aligned}$$

这里 $\mu \cong \mu_0$

$$\begin{aligned}\frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{k'' - k}{k'' + k} = \frac{\frac{1+i}{\delta} - \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}{\frac{1+i}{\delta} + \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \\ &= \frac{1+i - \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\delta}{1+i + \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\delta} = \frac{1+i - \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}}{1+i + \sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\sigma}}}\end{aligned}$$

反射系数为:

$$R_{\perp} = \frac{|E'_{0\perp}|^2}{|E_{0\perp}|^2} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\right)^2 + 1}$$

$$R_{\parallel} = \frac{|E'_{0\parallel}|^2}{|E_{0\parallel}|^2} = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\right)^2 + 1}{\left(1 + \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}\right)^2 + 1}$$

设

$$A = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}} \ll 1. \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} R_{\perp} = R_{\parallel} = R &= \frac{(1-A)^2 + 1}{(1+A)^2 + 1} \cong \frac{1-A}{1+A} \\ &= \frac{(1-A)(1-A)}{(1+A)(1-A)} = \frac{1-2A+A^2}{1-A^2} \cong 1-2A \end{aligned}$$

$$R \cong 1-2A = 1-2\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}}$$

5、导体内功率损耗问题

我们知道，导体内的电场为：

$$\begin{aligned}\vec{E}'' &= \vec{E}_0'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ &= \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}\end{aligned}$$

其中略去了 β_x 因子，可见导体内的电流密度为

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}''$$

导体内单位体积内的平均功耗为：

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{2} R_e (\vec{j} \cdot \vec{E}''^*) \\
 &= \frac{1}{2} R_e (\sigma \vec{E}'' \cdot \vec{E}''^*) \\
 &= \frac{1}{2} R_e \left[\sigma \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} \cdot \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{-i(\beta z - \omega t)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sigma E_0''^2 e^{-2\alpha z}
 \end{aligned}$$

导体表面单位面积的功耗为：

$$P = \int_0^\infty p ds = \frac{1}{2} \sigma E_0''^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0''^2}{4\alpha}$$

定义表面电流密度:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_f &= \int_0^\infty \vec{j} dz = \int_0^\infty \sigma \vec{E}_0'' e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)} dz \\&= \sigma \vec{E}_0'' \int_0^\infty e^{-(\alpha - i\beta)z} e^{-i\omega t} dz \\&= \sigma \vec{E}_0'' e^{-i\omega t} \int_0^\infty e^{-(\alpha - i\beta)z} dz \\&= \sigma \vec{E}_0'' e^{-i\omega t} \frac{1}{\alpha - i\beta}\end{aligned}$$

因为 $\alpha - i\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{-i\phi} . \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$

故得

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_f &= \sigma \vec{E}_0'' e^{-i\omega t} \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ &= \sigma \vec{E}_0'' \frac{e^{i(\phi - \omega t)}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{aligned}$$

由此可见：

$$\vec{\alpha}_f \text{ 的峰值为: } \alpha_{f_0} = \frac{\sigma E_0''}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} .$$

所以
$$P = \frac{\sigma E_0''^2}{4\alpha} = \frac{\sigma^2 E_0''^2}{4\alpha\sigma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha\sigma} \alpha_{f_0}^2$$

与平均功率 $P = \frac{1}{2} I_m^2 R$ 比较, 可见

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\sigma}$$

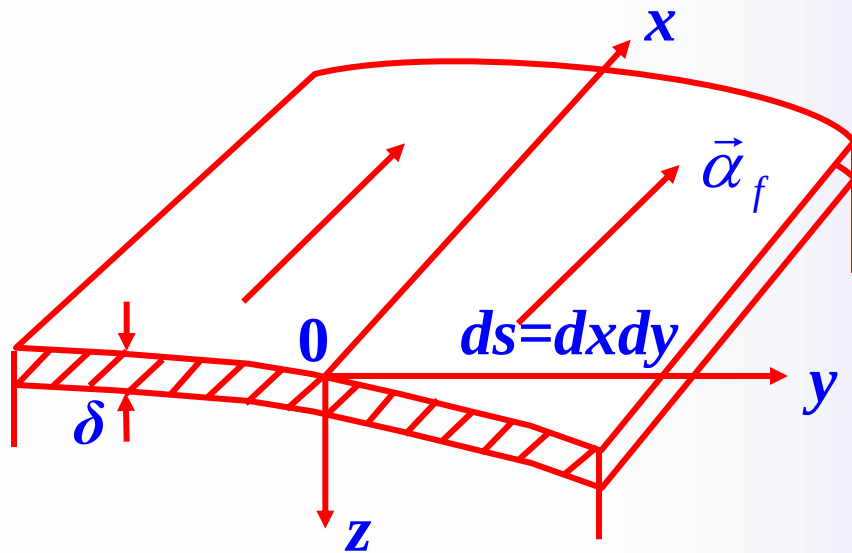
称为导体表面电阻

即

$$R_s = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\sigma}$$

在高频情况下: $(\alpha \approx \beta)$

$$R_s \approx \frac{2\alpha^2}{2\alpha\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma} \cong \frac{1}{\delta\sigma}$$



§ 4.4 电磁波在波导中的传播

Electromagnetic Wave Propagation in Wave Guide

前面讨论了电磁波在无界空间的传播规律。在无界空间中，电磁波最基本的存在形式为平面电磁波，其电场和磁场都作横向振荡，通常把这种模式的电磁波称为横电磁波，简称TEM波。

本节主要讨论电磁波在有界空间—波导中的传播，在这里将要解决两个问题：

第一，波导中的电磁波怎样分布？是否存在TEM波？

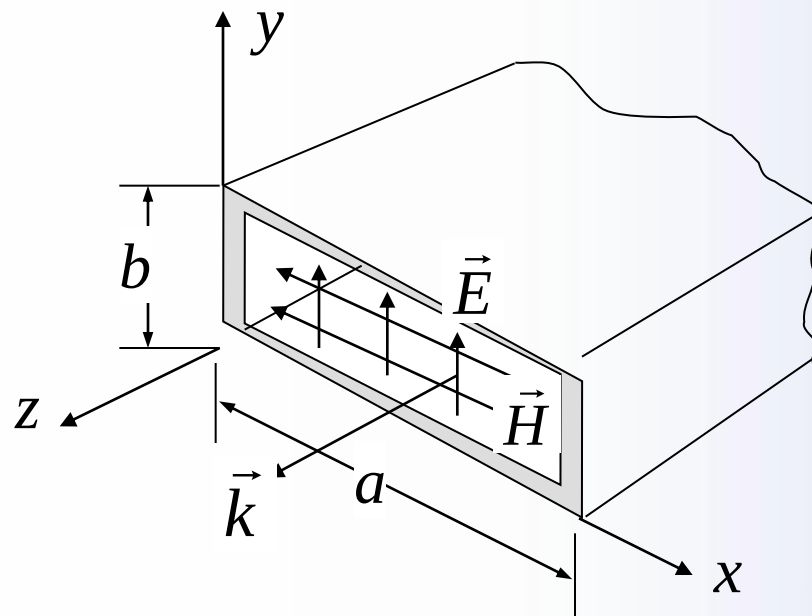
第二，频率多高或者波长多长的电磁波才能在波导中传播？

1、矩形波导中的电磁波

所谓波导(或者波导管wave guide)是利用良导体制成的中空管状传输线, 是一种传播电磁能的工具(主要传输波长在厘米数量级的电磁波)。常见的有截面为矩形和圆形的, 分别称为矩形波导和圆柱形波导。电磁波在波导中只能沿着管的轴线方向传播, 这就使得波导中的电磁波与无界空间的电磁波在性质上有很大的差别, 将会看到有界空间中传播的电磁波不是TEM波。

为了简便, 我们只讨论矩形波导。

设矩形波导截面边长为 a 、 b , z 轴沿波导管的轴线方向(如图所示):



由于波导中没有自由电荷和传导电流，即 $\rho = 0$
 $\vec{j} = 0$.而且在一定频率下，介电常数 ϵ 和磁导率 μ 既不随时间变化，也与坐标无关。因此
波导内电磁波应满足亥姆霍兹方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

波动方程

根据两种不同介质界面上的边值关系：

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha} \end{cases}$$

因为波导的内表面是我们所研究的场的边界，在这些边界上，电磁波满足界面条件。设想界面是理想导体，电磁波穿透深度为0，导体内电磁场

$\vec{E}_1 = 0, \vec{B}_1 = 0$. 故有：

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E} = 0 \\ \hat{n} \times \vec{H} = \vec{\alpha} \end{cases}$$

这两个条件满足后，另外两条件

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot \vec{D} = \sigma \\ \hat{n} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

自然满足。按照切向电场分量连续的关系， $E_{1t}=E_{2t}$ （良导体 $E_{1t}=0$ ，从而使得 $E_{2t}=0$ ）。且在波导内表面处有：

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E} = 0 \\ \frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (\nabla \cdot \vec{E} = 0)$$

即

$$\begin{cases} \text{当 } x = 0, a \text{ 时, } E_y = E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \text{当 } y = 0, b \text{ 时, } E_x = E_z = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

边界条件

至此，得到波导中电磁波应该满足的微分方程和边界条件：

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad a, \quad E_y = E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ y = 0, \quad b, \quad E_x = E_z = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

波导中的电磁场分布情况：

因为波导中电磁波是沿管的轴向，即沿 z 轴方向传播，因而电场强度为：

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

将此式代入亥姆霍兹方程，得到：

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_0}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2) \vec{E}_0 = 0$$

设 $u(x, y)$ 为电磁场的任一直角分量，它满足上式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (k^2 - k_z^2)u = 0$$

用分离变量法解这个微分方程：

$$\text{令 } u(x, y) = X(x)Y(y)$$

代入上式可求得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = k_z^2 - k^2$$

要使上式成立，必须要求左边每一项等于常数，
即

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2$$

而且要求：

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

从而有：

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0$$

这就是大家熟知的振动方程，它们一般解为

$$X(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

$$Y(y) = C \sin k_y y + D \cos k_y y$$

这里的 A 、 B 、 C 、 D 、 k_x 、 k_y 都是待定常数。至此得到沿 z 轴方向传播的电磁波电场的三个分量为：

$$\begin{cases} E_x = (A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y + D \cos k_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = (A' \sin k_x x + B' \cos k_x x)(C' \sin k_y y + D' \cos k_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = (A'' \sin k_x x + B'' \cos k_x x)(C'' \sin k_y y + D'' \cos k_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases}$$

其中 $A, B, C, D;$

待定解

$A', B', C', D';$

A'', B'', C'', D'' 以及 k_x, k_y 共计14个待定常数
要由边界条件和其它物理条件来确定。

a) 当 $y = 0$ 时, $E_x = 0$, 即

$$E_x = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) \cdot D \cdot e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

有 $D = 0$ ，故

$$\begin{aligned} E_x &= (A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \sin k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= (A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x) \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

这里 $A_1 = A \cdot C$ ， $B_1 = B \cdot C$ 。

b) 当 $y=b$ 时， $E_x = 0$ 。即

$$E_x = (A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x) \sin k_y b e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

有 $\sin k_y b = 0$ ，故

$$\sin k_y b = 0$$

$$k_y b = n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

即

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

c) 当 $x = 0$ 时, $E_y = 0$, 即

$$E_y = B'(C' \sin k_y y + D' \cos k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

有 $B' = 0$, 故

$$\begin{aligned} E_y &= (A' \sin k_x x)(C' \sin k_y y + D' \cos k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= (A'_1 \sin k_y y + B'_1 \cos k_y y) \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

这里 $A'_1 = A' \cdot C'$, $B'_1 = A' \cdot D'$

d) 当 $x=a$ 时, $E_y=0$, 即

$$E_y = (A'_1 \sin k_y y + B'_1 \cos k_y y) \sin k_x a e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

只有 $\sin k_x a = 0$, 才能满足, 故

$$k_x a = m\pi. \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

即:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

e) 当 $x=0$ 时, $E_z = 0$, 即

$$E_z = B''(C'' \sin k_y y + D'' \cos k_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

有 $B'' = 0$, 即得

$$\begin{aligned} E_z &= (A'' \sin k_x x)(C'' \sin k_y y + D'' \cos k_y y)e^{i(k_z z - \omega t)} \\ &= (A_1'' \sin k_y y + B_1'' \cos k_y y) \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

这里 $A_1'' = A'' \cdot C''$, $B_1'' = A'' \cdot D''$.

f) 当 $y=0$ 时, $E_z = 0$, 即

$$E_z = B_1'' \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)} = 0$$

有 $B_1'' = 0$ ，即得

$$E_z = A_1'' \sin k_y y \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

另外，在 $x=a, y=b$ 面上，要求 $E_z = 0$ ，亦可求得 E_z 的表达式。

至此，还有 A_1, B_1, A_1', B_1' 和 A_1'' 5 个常数未定。

g) 在波导中，因为无自由电荷，即

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

即

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

这样即有：

$$\begin{aligned} & (A_1 k_x \cos k_x x - B_1 k_x \sin k_x x) \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ & + (A'_1 k_y \cos k_y y - B'_1 k_y \sin k_y y) \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)} \\ & + (ik_z A''_1) \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & A_1 k_x \cos k_x x \sin k_y y + A'_1 k_y \sin k_x x \cos k_y y \\ & + (ik_z A''_1 - B_1 k_x - B'_1 k_y) \sin k_x x \sin k_y y = 0 \end{aligned}$$

要使上式成立，充要条件是它们的系数分别为零（考虑分量的正交性），故有

$$\begin{cases} A_1 k_x = 0 \\ A'_1 k_y = 0 \\ ik_z A''_1 - B_1 k_x - B'_1 k_y = 0 \end{cases}$$

这里，因为

$$k_x \neq 0, \quad \text{故} \quad A_1 = 0$$

$$k_y \neq 0, \quad \text{故} \quad A'_1 = 0$$

$$A''_1 = \frac{B_1 k_x + B'_1 k_y}{ik_z}$$

从而得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = B_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = B'_1 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = \frac{B_1 k_x + B'_1 k_y}{ik_z} \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{array} \right.$$

波导中的磁场 $\vec{H}$ ，也应该具有电场 $\vec{E}$ 的形式，即

$$\vec{H}(\vec{x} \cdot t) = \vec{H}_0(x \cdot y) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

根据 $\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$, 有

$$\begin{cases} H_x = -\frac{1}{\omega\mu k_z} [B_1 k_x k_y + B'_1 (k_y^2 + k_z^2)] \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ H_y = \frac{1}{\omega\mu k_z} [B_1 (k_x^2 + k_z^2) + B'_1 k_x k_y] \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ H_z = \frac{i}{\omega\mu} [B_1 k_y - B'_1 k_x] \cos k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases}$$

2、横电波（TEW）和横磁波（TMW）

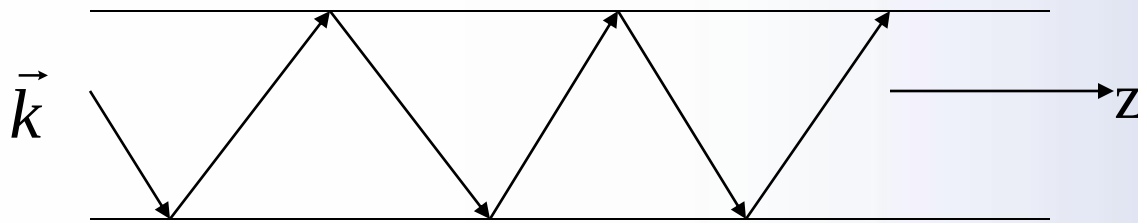
经过以上推导发现电场 E_x 、 E_y 、 E_z 和磁场 H_x 、 H_y 、 H_z 中只有两个独立常数 B_1 、 B'_1 。因为 $k_x = \frac{m\pi}{a}$ ， $k_y = \frac{n\pi}{b}$ 对于一定的 (m, n) 如果选一种波模具有 $E_z=0$ ，则该波模的 $B_1/B'_1 = -k_y/k_x$ 就完全确定，因而另一种波模必须有 $H_z \neq 0$ 。由电场和磁场的表达式可以看出，对 $E_z=0$ 的波模， $H_z \neq 0$ 。因此在波导中传播的有如下特点：电场和磁场不能同时为横波，通常选一种波模为 $E_z=0$

($H_z \neq 0$) 的波称为横电波(TEW)。另一种波模为的波 $H_z = 0$ (但 $E_z \neq 0$) , 称为横磁波 (TMW) 。TEW和TMW又按 (m, n) 值的不同而分为 TE_{mn} 波和 TM_{mn} 波。一般情况下, 在波导中可以存在这些波的叠加。

3、讨论

a) 根据 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的各分量, 我们看到: 波导内电磁场沿传播方向不能同时为零。因为如果 E_z 和 H_z 同时为零, 即 $E_z=0, H_z=0$. 使得 $B_1 = 0, B'_1 = 0$. 从而导致整个电磁场为零, 所以说波导内不可能传播横电磁波。然而, $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 沿传播方向的分量

不能同时为零，这一结论似乎与电磁波的横波性相矛盾。实际上，横波性是电磁波固有的性质。这种现象出现在波导中之所以不好理解，是因为波导的轴线方向并不是波的真正传播方向，波导中的电磁波是在管壁上多次反射中而曲折的前进，由于这种多次反射波的叠加，在垂直于波导轴线方向成为驻波，而使叠加波沿轴线方向前进。



b) 在波导管的横截面上，场是谐变的。其分

布情况直接取决于 m 和 n 这两个常数的值。不同的 m 和 n 的组合对应不同的场结构。我们称之为不同的波型或模式，**一组 (m,n) 的值组成一个模式**，TM波记为 TM_{mn} ，TE波记为 TE_{mn} 。在实际问题中，我们总是选定一个模式来传递电磁波的。

c) 由 $k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ ，可以看

到对于一定尺寸的矩形波导（即 a,b 选定），如果选定某一模式 TE_{mn} 或 TM_{mn} （ m,n 也确定），则从 k_z 式中得出：

若电磁场的振荡频率 ω 足够大, 使得 $k^2 > k_x^2 + k_y^2$
而 k_z 是实数, 根据场的表达式中因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$, 我们立即看到场沿着 z 方向传播, 它是行波。

若电磁场的振荡频率 ω 足够小, 以致于 $k^2 < k_x^2 + k_y^2$
则 k_z 是纯虚数, 显然由因子 $e^{i(k_z z - \omega t)}$ 看到, 这不再是行波, 而是场随着 z 的增加而指数衰减, 所以此时电磁场不能在该波导内以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 波型传播。

我们把 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, 即 $k_z = 0$ 称为临界状态
(Critical state), 由 k_z 式子得到临界频率 $\omega_{c.mn}$ 称为截止频率(Cut-off frequency);

$$\begin{aligned}\omega_{c.mn} &= \nu \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}\end{aligned}$$

只有频率 $\omega > \omega_{c.mn}$ 的电磁波才能在波导中传播，故把 $\omega_{c.mn}$ 称为截止频率。

相应地，截止波长(Cut-off wavelength)为：

$$\lambda_{c.mn} = \frac{2\pi\nu}{\omega} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

TE₁₀波型: $\omega_{c,10} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\pi}{a};$

TE₀₁波型: $\omega_{c,01} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\pi}{b};$

TM₁₁波型: $\omega_{c,11} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2};$

$\lambda_{c,10} = 2a \quad (m=1, n=0)$

最大波长

d) k_z 中有 v ，这里的 v 是电磁波在自由空间中的传播速度，不是在波导中的传播速度。那么电磁波在波导中的传播速度有多大呢？

按照相速 u 和群速 u_g 的定义：

$$u = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_z}$$

$$u_g = \frac{d\omega}{dk_z}$$

相速度反映的是位相变化状况的速度，群速度反映的是各单色波叠加后的合成振幅的最大值传播的速度。因此相速度

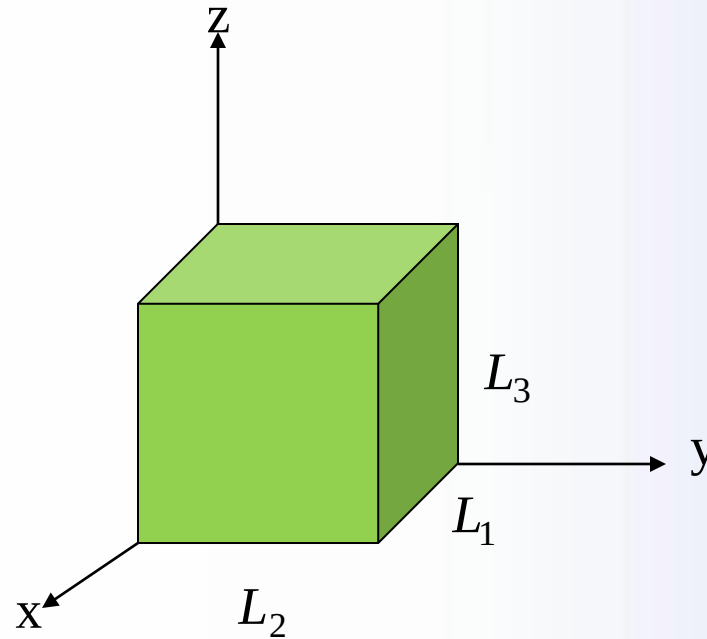
$$u = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} \geq v$$

群速度

$$u_g = \frac{d\omega}{dk_z} = v^2 \frac{k_z}{\omega} = v^2 / u \leq v$$

4、谐振腔 (Resonant cavity)

我们知道：波导管是用来传输电磁波。谐振腔与之不同，它是用来产生高频振荡。如图所示：



根据电磁波在波导管内的传输理论方法，容易得到腔内电磁波的电场和磁场也满足亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0 \end{cases}$$

以及界面上的边值关系：

$$\begin{cases} \hat{n} \times \vec{E} = 0 \\ \hat{n} \times \vec{H} = \vec{\alpha} \end{cases}$$

与波导管理论不同的地方是腔内电磁波的电场和磁场任一直角分量是 x , y , z 的函数。

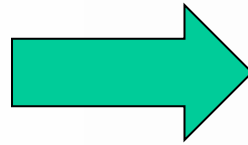
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

设 $u(x, y, z)$ 为电磁场的任一直角分量, 即

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

用分离变量法解即可求亥姆霍兹方程所满足边值关系的解。

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \end{cases}$$



$$u(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned} & (A_1 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x) \\ & (A_2 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y) \\ & (A_3 \cos k_z z + B_3 \sin k_z z) \end{aligned}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

用相似的处理方式，在 $x=0, y=0, z=0$ 面上的边界条件，可以得到：

$$E_x = A \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

$$E_y = A' \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

$$E_z = A'' \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z$$

再考虑 $x=L_1, y=L_2, z=L_3$ 面上的边界条件得到：

$$k_x = \frac{m\pi}{L_1}, k_y = \frac{n\pi}{L_2}, k_z = \frac{p\pi}{L_3}$$

$$(m, n, p = 0, 1, 2, \dots)$$

另外

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \longrightarrow k_x A + k_y A' + k_z A'' = 0$$

由此得到，对应每一组（m, n, p）值，与两个独立的偏振模。谐振频率为：

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$$

其中m, n, p若有两个同时为零，则总电场为零。

若 $L_1 > L_2 > L_3$ ，则最低频率的谐振波模式为 $(1,1,0)$ ，频率为：

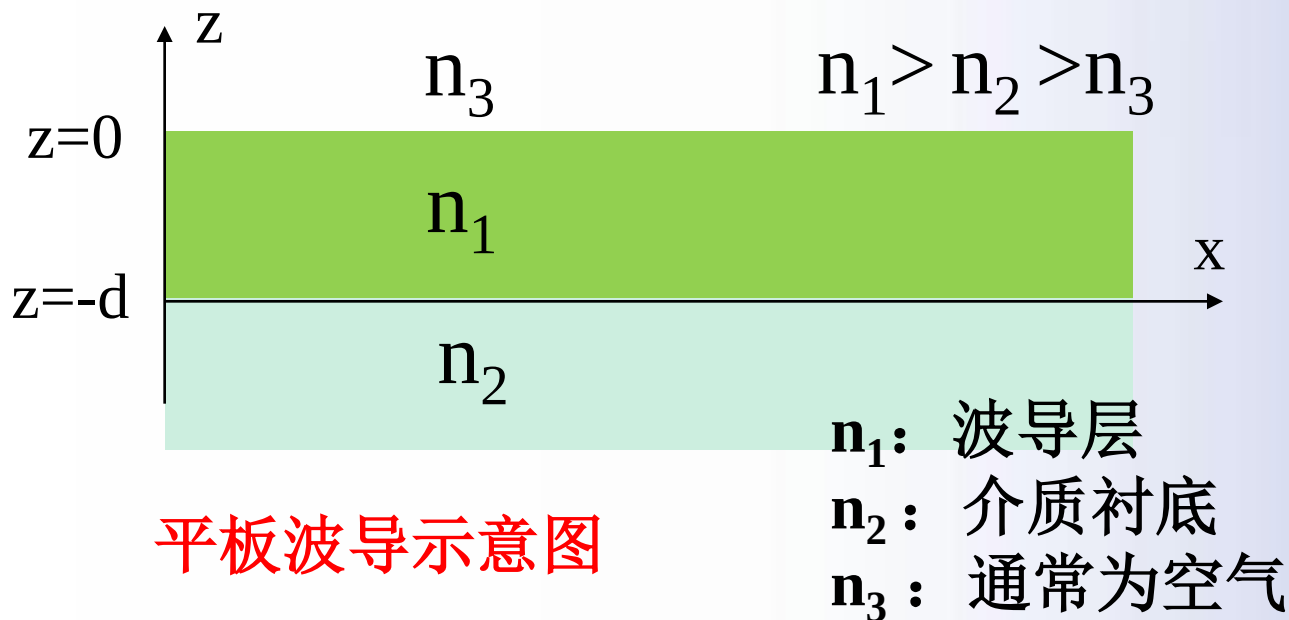
$$\omega_{110} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}$$

相应的电磁波波长为：

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}}$$

5、介质光波导

金属波导通常用来传播微波。对于波长比微波短几个量级的光波，通常可以用介质将其限制在一定空间传播。这一类波导称之为**介质波导**。



平板波导：介质在 z 方向有折射率调制，在 xy 方向无限延伸。其中可以有TE模和TM模。

TE模：

$$E(r,t) = E(z)e^{i(\beta x - \omega t)}, \quad H(r,t) = H(z)e^{i(\beta x - \omega t)}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

$$\beta = k_x = k_1 \sin \theta = n_1 k_0 \sin \theta$$

为传播方向波矢， θ 为入射角

根据

$$\begin{cases} \nabla \times E = i\omega\mu H \\ \nabla \times H = -i\omega\varepsilon E \end{cases} \quad \text{且} \quad E_x = E_z = H_y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x \\ i\beta E_y = i\omega\mu H_z \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - i\beta H_z = -i\omega\varepsilon E_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) E_y = 0$$

其中 $\omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2$ 跟介质的折射率有关

根据波导要求，中间层应该满足全反射条件
可以定义：

$$\begin{cases} k_1^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ \kappa_2^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \\ \kappa_3^2 = \beta^2 - k_0^2 n_3^2 \end{cases}$$

这样可以得到：

$$\begin{cases} E_{1y} = A_1 \cos(k_1 z) + A_2 \sin(k_1 z) \\ E_{2y} = B e^{\kappa_2(z+d)} \\ E_{3y} = C e^{-\kappa_3 z} \end{cases}$$

再有边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1y} |_{z=0} = E_{3y} |_{z=0} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{1y} |_{z=-d} = E_{2y} |_{z=-d} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{1x} |_{z=0} = H_{3x} |_{z=0} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{1x} |_{z=-d} = H_{2x} |_{z=-d} \end{array} \right. \quad (4)$$

可以得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \cos(k_1 d) - A_2 \sin(k_1 d) = B \\ C = A_1 \\ C = -\frac{k_1}{\kappa_3} A_2 \end{array} \right.$$

从而得到：

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{3y} = A_1 e^{-\kappa_3 z} \\ E_{1y} = A_1 [\cos(k_1 z) - \frac{\kappa_3}{k_1} \sin(k_1 z)] \\ E_{2y} = A_1 [\cos(k_1 z) + \frac{\kappa_3}{k_1} \sin(k_1 z)] e^{\kappa_2(z+d)} \end{array} \right.$$

再根据边界条件（4）得：

$$k_1 \sin(k_1 d) - \kappa_3 \cos(k_1 d) = \kappa_2 [\cos(k_1 d) + \frac{\kappa_3}{k_1} \sin(k_1 d)]$$

最终得到波导模式方程：

$$\tan(k_1 d) = \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{k_1 \left(1 - \frac{\kappa_2 \kappa_3}{k_1^2}\right)}$$

也可以写成：

$$k_1 d = \arctan\left[\frac{\kappa_2 + \kappa_3}{k_1 \left(1 - \frac{\kappa_2 \kappa_3}{k_1^2}\right)}\right] + m\pi$$

$$= \arctan\left[\frac{\left(\frac{\kappa_2}{k_1} + \frac{\kappa_3}{k_1}\right)}{\left(1 - \frac{\kappa_2 \kappa_3}{k_1^2}\right)}\right] + m\pi = \arctan\left(\frac{\kappa_2}{k_1}\right) + \arctan\left(\frac{\kappa_3}{k_1}\right) + m\pi$$

穿透深度: n_2 中 $\frac{1}{\kappa_2}$, n_3 中 $\frac{1}{\kappa_3}$

导模条件: $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$

截止条件: $\kappa_2 = 0$, 即: $\beta = k_0 n_2$

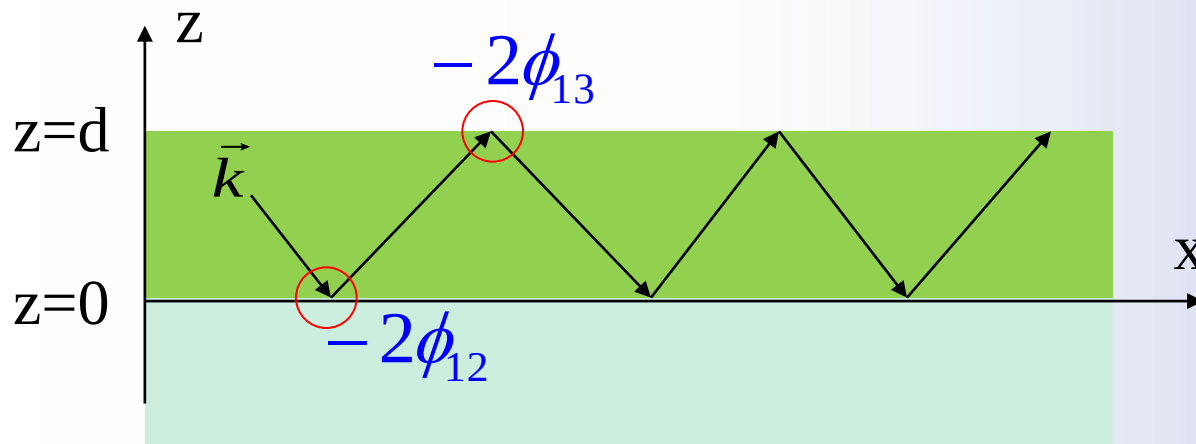
截止波长与波导厚度关系:

$$\left(\frac{d}{\lambda}\right)_{TE} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left[\arctan \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} + m\pi \right]$$

同理可以得出TM模式性质:

$$\left(\frac{d}{\lambda}\right)_{TM} = \frac{1}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \left[\arctan \frac{n_1^2}{n_3^2} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_2^2}} + m\pi \right]$$

几何光学方法处理:



根据在一个时间周期内，波导内光在上下两次全反射形成 z 方向的驻波条件：

$$2k_1d - 2\phi_{12} - 2\phi_{13} = 2m\pi$$

得到： $k_1d = (2\phi_{12} + 2\phi_{13} + 2m\pi) / 2$

$$= \arctan\left(\frac{\kappa_2}{k_1}\right) + \arctan\left(\frac{\kappa_3}{k_1}\right) + m\pi$$

与前式相同！

§ 4.5 等离子体中电磁波 和表面等离激元

**Electromagnetic Wave in Plasma and
Surface Plasmon Polariton (SPP)**

等离子体（Plasma）是包含了等量正负电荷（电子或离子）的电离气体或带电粒子的集合，宏观上呈现电中性。这里讨论一种稀薄等离子体的简单情形，以及与等离子体性质相类似的金属中自由电子振荡形成的一种表面波形式。

涉及到如下几个概念：

等离子体振荡频率

色散关系

Drude模型

金属表面等离激元（SPP）

(一) 等离子体振荡频率

密度均匀的等离子体中的麦克斯韦方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_+ + \rho_-) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

$(\rho_+ + \rho_-) = 0$ 是电中性所要求的

当平面电磁波进入等离子体，电子和离子在电磁场作用下运动，由于离子比较重，通常认为不动，并且忽略磁场的作用。

电荷为 e 质量为 m 的电子在电场中的运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} = -e\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

这是一个受迫振动方程，其解为

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{e\vec{E}_0}{i\omega m} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

于是有电流密度

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = -Ne\vec{v} = -\frac{Ne^2}{i\omega m} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

代入麦克斯韦方程组第二式，并由

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$$

得：

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} = 0$$

从而得到：

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / c^2$$

其中

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

等离子体振荡频率
Plasma frequency

上式还可表示为

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}$$

等离子体的色散关系（或色散方程）
dispersion relation

从而得到：

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

其中

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$$

讨论:

(1) 当电磁波频率 $\omega < \omega_p$ 时, 可以发现 k^2 是负值, 则

$$k = \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

表明电磁波在等离子体中衰减很快, 不能透过。
其穿透深度为

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

所以 $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$

又称为截止频率
cutoff frequency

(2) 当电磁波频率 $\omega > \omega_p$ 时，可以发现 k 是实数

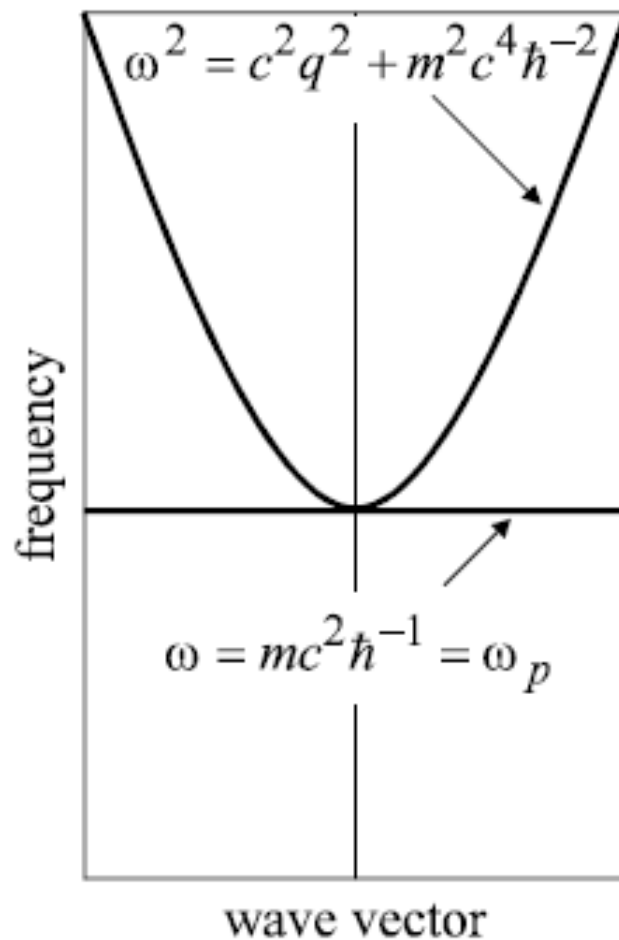
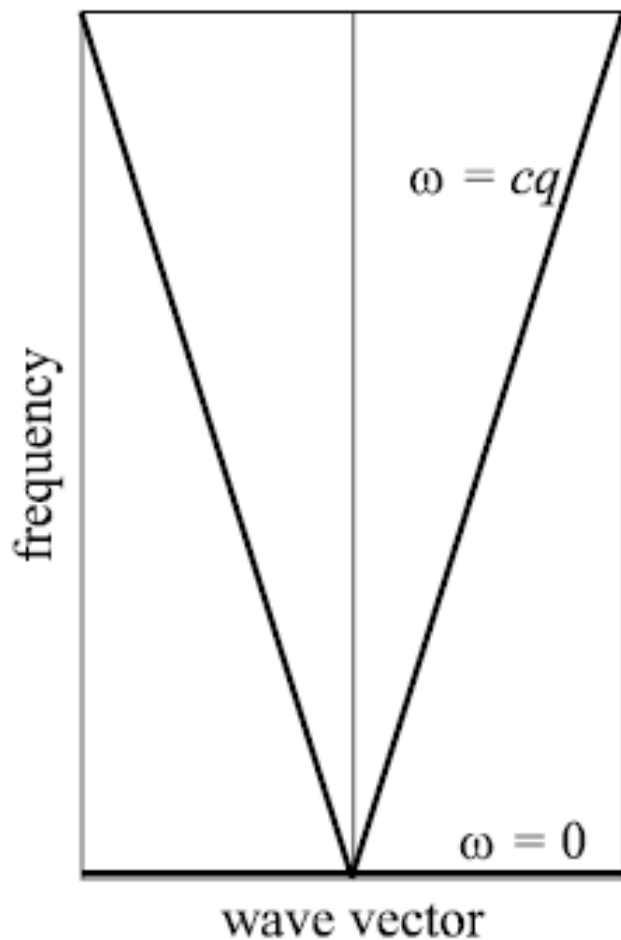
$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

举例：

地面上空电离层50~500km高处，等离子体密度 $10^{12\sim 15}/\text{m}^3$ ，截止频率约为10MHz，小于我们用的电视频段。所以可以穿透它通过卫星传播。

金属中的自由电荷也能看成等离子体，其浓度为 $\sim 10^{28}/\text{m}^3$ ，得到等离子体频率大于1000THz，所以大部分可见光都不能穿透它，因而可作反射镜。

自由空间和等离子体中电磁波色散图



(二) 金属的介电函数的色散

考虑到损耗项的电子在电场中的运动方程

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\gamma\dot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E}$$

可以解得：

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \mathbf{E}(t)$$

$$\mathbf{P} = -\frac{ne^2}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}\right) \mathbf{E}$$

从而得到金属的介电函数

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{不考虑损耗时})$$

Drude模型

同样可以看出，当 $\omega < \omega_p$ 时，金属的 ε 是负值，电磁波不能通过，当 $\omega > \omega_p$ 时，金属的 ε 是正值，其性质就类似于普通电介质，光可以通过。

考虑到等离子体中电子运动的固有频率 ω_i ，它通常与空间或介质中的局域结构有关，从而形成一项回复力，这时的电子运动方程为

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\gamma\dot{\mathbf{x}} + m\omega_i^2\mathbf{x} = -e\mathbf{E}$$

可以得到：

$$\mathbf{x}_i(t) = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}(t)$$

根据等离子体中总电子数，求得总电极化强度

$$P = \sum_i N f_i e \mathbf{x} = \sum_i \frac{Ne}{m} \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}(t)$$

所以，作为一种等离子体，金属的介电函数为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \sum_i \frac{Ne^2}{m} \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Lorentz模型

(振子模型)

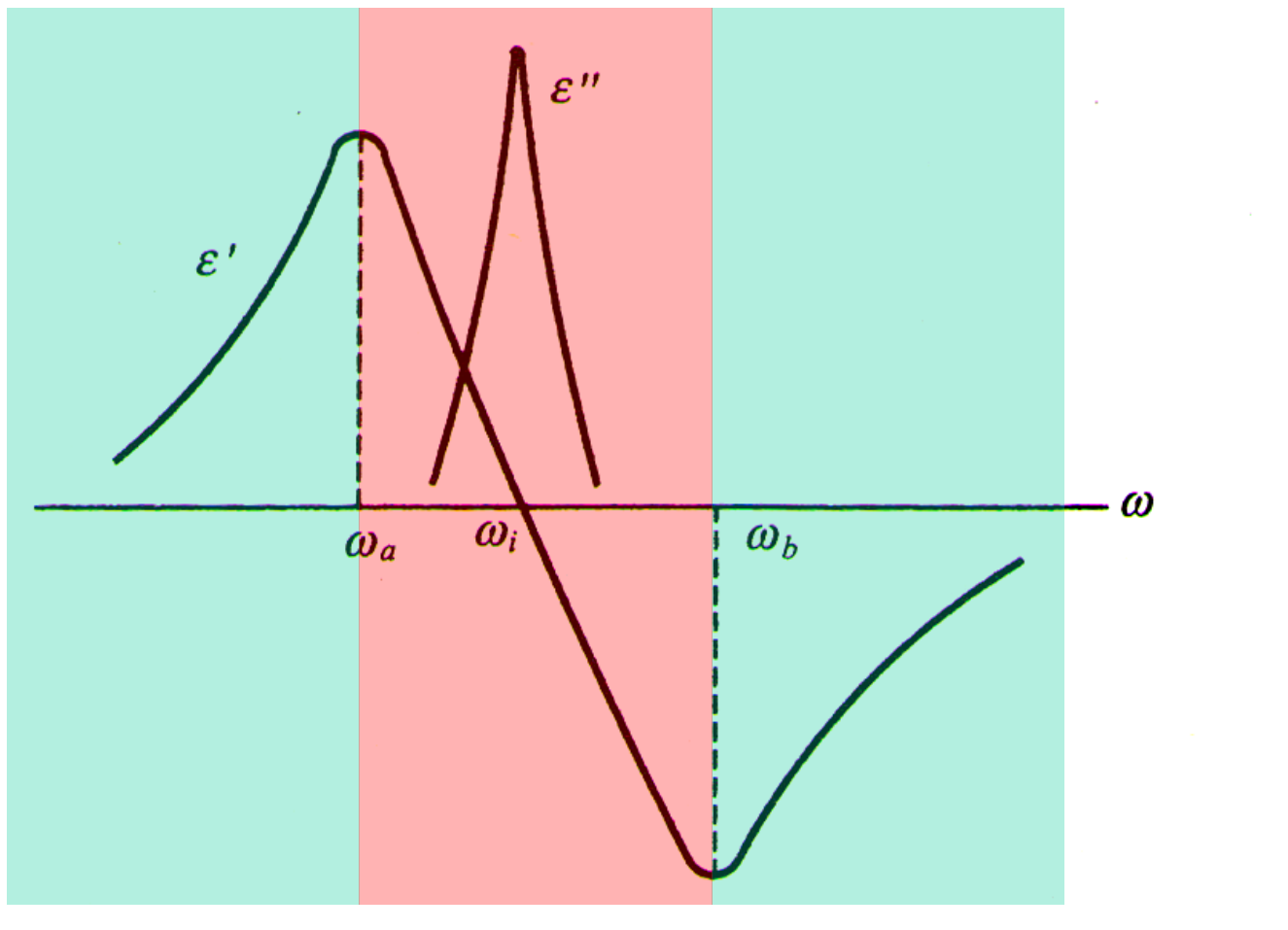
其中 f_i 满足求和规则： $\sum_i f_i = 1$

相对介电函数为 $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_i f_i \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_i f_i \frac{\omega\gamma}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Lorentz 模型色散图



(三) 金属表面等离子激元



根据波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon \mathbf{E} = 0$$

考虑在金属与介质的界面是 $z=0$ ，可能的表面波模式沿着 x （波矢为 β ）方向，可以得到

TE模式的波动方程: $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - \beta^2) E_y = 0$

并且有: $H_x = i \frac{1}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad H_z = \frac{\beta}{\omega \mu_0} E_y$

$$E_y(z) = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}$$

$$H_x(z) = i A_1 \frac{1}{\omega \mu_0} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}$$

$$H_z(z) = A_1 \frac{\beta}{\omega \mu_0} e^{i\beta x} e^{k_1 z}$$

$z < 0$

$$E_y(z) = A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$$

$$H_x(z) = -i A_2 \frac{1}{\omega \mu_0} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$$

$$H_z(z) = A_2 \frac{\beta}{\omega \mu_0} e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$$

$z > 0$

根据界面上 E_y 和 H_x 的连续性边界条件得到：

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = 0 \\ A_1 k_1 + A_2 k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1(k_1 + k_2) = 0$$

由于， k_1, k_2 为金属和介质中的横向波矢，二者不受特殊限制，而且都为正值（其方向已经含在在 e 指数中），因此必有

$$A_1 = 0$$

也就说明，这是一个平庸解。找不到一个确定的模式满足如上边界条件。即：TE表面模不存在！

TM模式的波动方程: $\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + (k_0^2 \varepsilon - \beta^2) H_y = 0$

并且有: $E_x = -i \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial z}$, $E_z = -\frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} H_y$

$$H_y(z) = A_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}$$

$$E_x(z) = -i A_1 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_1 e^{i\beta x} e^{k_1 z}$$

$$E_z(z) = -A_1 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} e^{i\beta x} e^{k_1 z}$$

$$z < 0$$

$$H_y(z) = A_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$$

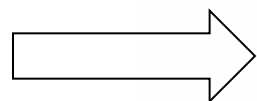
$$E_x(z) = i A_2 \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} k_2 e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$$

$$E_z(z) = -A_2 \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} e^{i\beta x} e^{-k_2 z}$$

$$z > 0$$

根据界面上 H_y 和 E_x 的连续性边界条件得到：

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = 0 \\ \frac{A_1 k_1}{\epsilon_1} + \frac{A_2 k_2}{\epsilon_2} = 0 \end{cases}$$



$$\frac{k_1}{\epsilon_1} + \frac{k_2}{\epsilon_2} = 0$$

可以解得

$$\beta = k_0 \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}$$

再根据：

$$k_1 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 \epsilon_1}$$
$$k_2 = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 \epsilon_2}$$

这就是我们得到的表面波模式的传播波矢。

存在TM表面模 $\rightarrow$ Surface Plasmon Polariton (SPP)

这个波矢通常也写成

$$k_{sp} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (1)$$

当 $k_{sp} \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon_1 + \epsilon_2 \rightarrow 0$, 即 $\epsilon_1(\omega) = -\epsilon_2$

代入金属介电函数:

$$\epsilon_1(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (2)$$

我们可以获得表面等离激元频率

$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \epsilon_2}}$$

或者

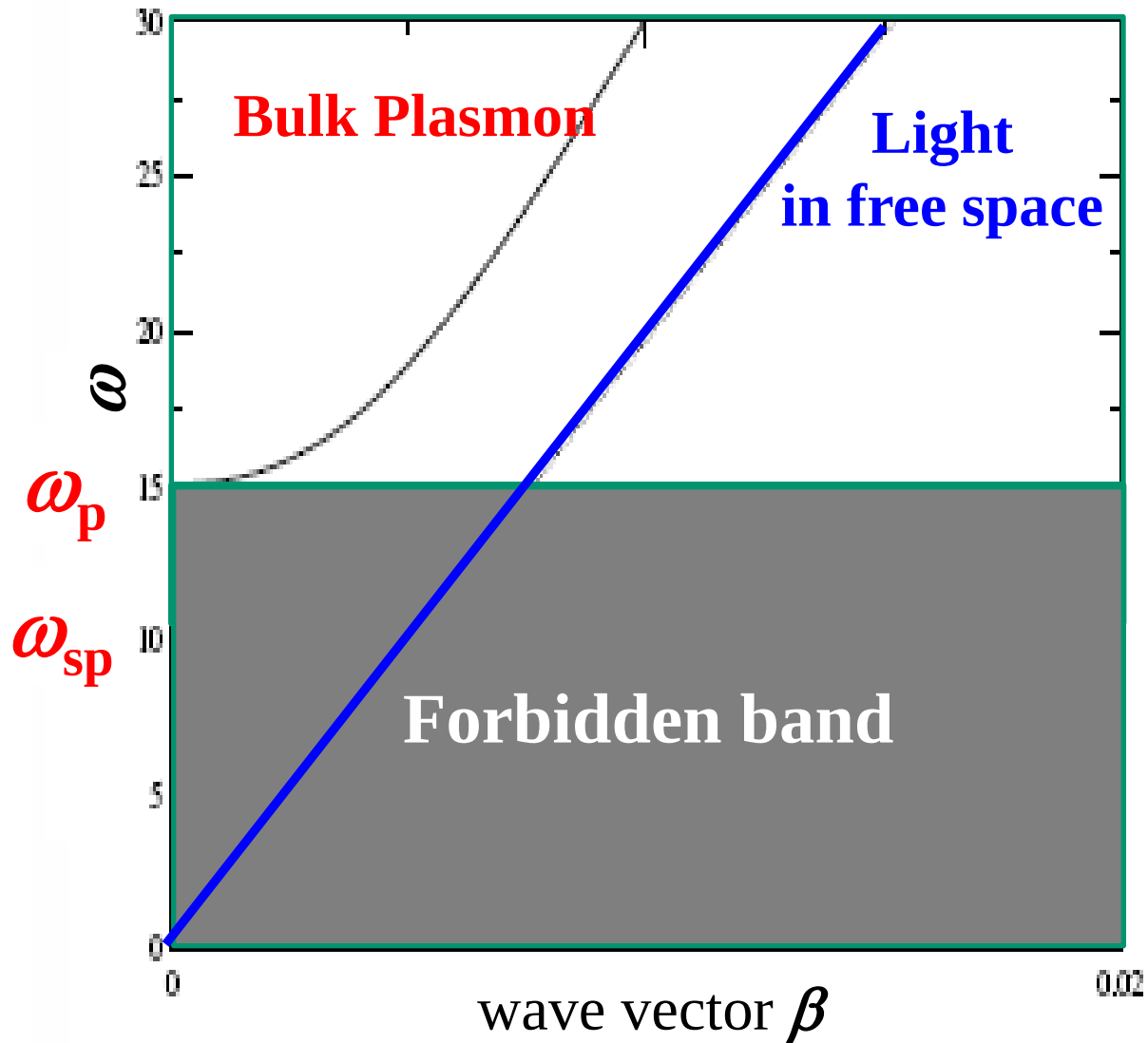
$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \epsilon_d}}$$

ϵ_d 指介质的介电常数

当介质为空气时, $\epsilon_d = 1$, 则

$$\omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{1+1}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

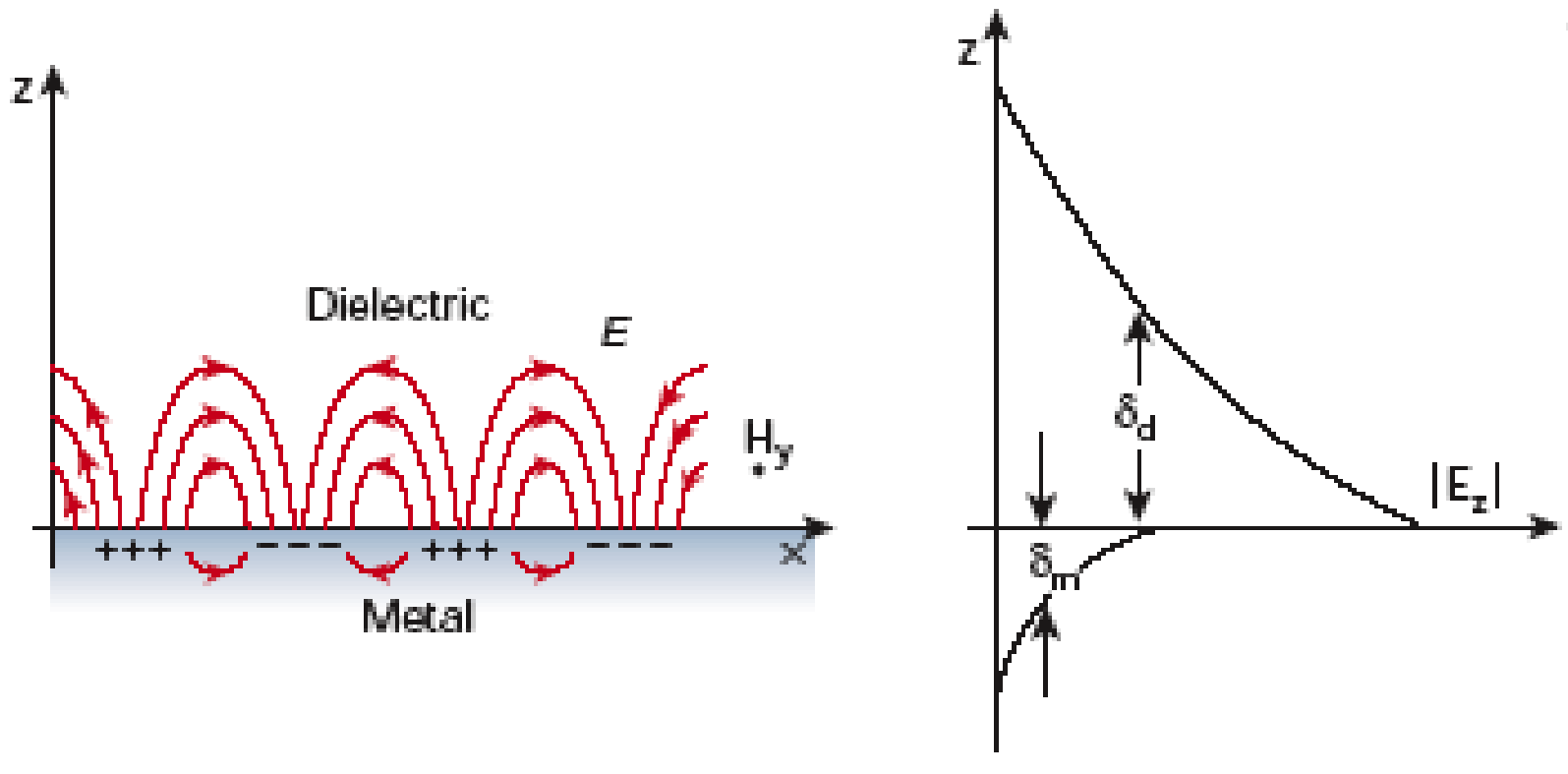
等离激元色散性质



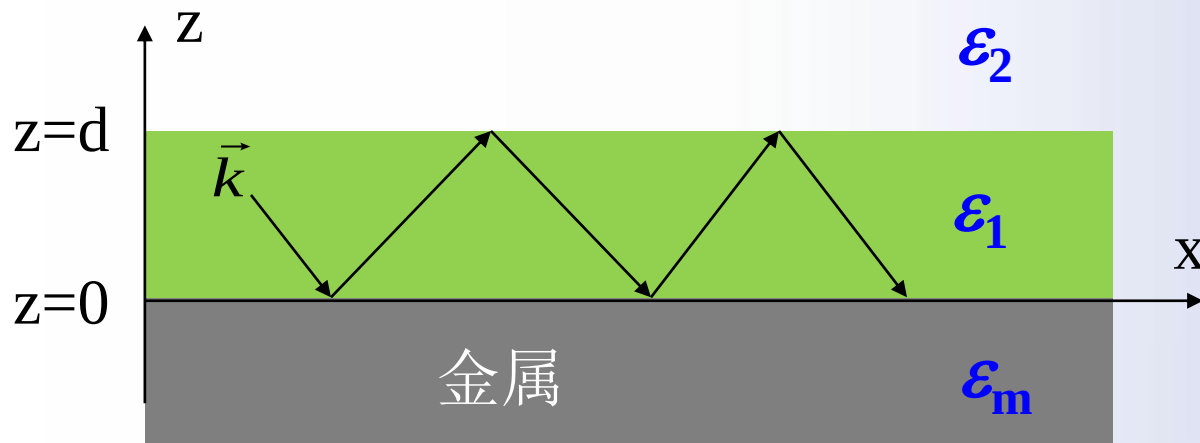
讨论:

- a) SPP是一种金属表面的电磁模式，也可以看成一种特殊的波导模。
- b) SPP波矢大于自由空间的电磁波波矢；其电磁场在横向维度上迅速衰减（亚波长性质）。
- c) SPP的本质是金属表面的电荷振荡与空间中光场耦合形成（具有极化激元的性质）。
- d) 这里的金属没有处理成良导体。也正因为此，才有SPP模式的出现。

SPP的物理图像



思考题：介质光波导与金属结合？



- ① 理想金属，满足良导体条件
- ② 金属不满足良导体，有SPP激发

请分别考虑TE和TM模存在的条件！

§ 4.6 高斯光束

Gaussian Beam

前面讨论的都是电磁波的解的形式都是建立在平面波的基础上，包括波导模式和SPP模式。然而，实际应用的定向电磁波通常要求它在空间中形成比较狭窄的射束。比如，激光器中发射的光束。

研究这种有限宽度的波束在自由空间的传播特点对于激光技术和定向电磁波传播问题具有重要意义。

(一) 亥姆霍兹方程的波束解

我们考虑的波束能量分布具有轴对称性，中间场强最大，靠近边缘强度迅速衰减。在横截面上具有这种分布性质的最简单函数就是高斯函数：

$$e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}}$$

参数 w 表示光束的宽度
波束宽度通常还是 z 的函数

波幅通常也是 z 的函数，我们以 $u(x,y,z)$ 代表电磁场任意直角分量，它可以具有如下形式

$$u(x, y, z) = g(z)e^{-f(z)(x^2+y^2)}e^{ikz}$$

$$u(x, y, z) = g(z)e^{-f(z)(x^2+y^2)}e^{ikz}$$

式中 e^{ikz} 表示以来与z的主要因子，剩下的因子中还有对z的缓变函数 $g(z)$ 和 $f(z)$ ，

因子 $e^{-f(z)(x^2+y^2)}$ 是限制波束的空间宽度的因子。

因子 $g(z)$ 主要表示波的振幅，同时也含有传播因子中鱼纯平面因子 e^{ikz} 偏离的部分。令

$$\phi(x, y, z) = g(z)e^{-f(z)(x^2+y^2)}$$

它满足z的缓变振幅近似。因此它对z的展开式中的高次项可以忽略。

根据亥姆霍兹方程 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$

将 $u(x, y, z) = \phi(x, y, z)e^{ikz}$ 代入
得到:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \phi}{\partial z} - k^2 \phi \right) + k^2 \phi = 0$$

忽略对z求导的高次项得到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

将 ϕ 的试探解形式代入

$$(x^2 + y^2)[2gf^2 - ikgf'] - [2fg - ikg'] = 0$$

上式要对任意 x, y 都成立，必须两括号内都为零

$$\begin{cases} 2f^2 = ikf' & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2fg = ikg' & (2) \end{cases}$$

上式(1)的解形式为

$$f(z) = \frac{1}{A + \frac{2i}{k}z}$$

通过（2）式，我们可以看出 $g(z)=f(z)*\text{常数}$

$$g(z) = \frac{u_0}{1 + \frac{2i}{kA} z}$$

将 $f(z)$ 变换，得到

$$f(z) = \frac{1}{A(1 + \frac{4z^2}{k^2 A^2})} (A - \frac{2i}{k} z)$$

令 $A = w_0^2$

$$w^2(z) = A(1 + \frac{4z^2}{k^2 A^2}) = w_0^2 [1 + (\frac{2z}{kw_0^2})^2]$$

则：

$$f(z) = \frac{1}{w^2(z)} \left(1 - \frac{2iz}{kw_0^2}\right)$$

那么高斯函数变为

$$e^{-f(z)(x^2+y^2)} = \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} \left(1 - \frac{2iz}{kw_0^2}\right)\right]$$

同样 $g(z)$ 可以写为

$$g(z) = \frac{u_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)^2}} e^{-i\varphi} = u_0 \frac{w_0}{w} e^{-i\varphi}$$

其中

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right)$$

最终得到光束场强函数

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{w_0}{w} e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2}} e^{-i\Phi}$$

其中

$$\Phi = kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2z \left[1 + \left(\frac{kw_0^2}{2z} \right)^2 \right]} - \varphi$$

(一) 高斯光束的传播特性

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{w_0}{w} e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2}} e^{-i\Phi}$$

振幅

相因子

$$e^{-\frac{x^2 + y^2}{w^2}}$$

限制波束宽度

波束宽度由 $w(z)$ 代表，在 $z=0$ 处波束具有最小宽度，称为**光束腰部——束腰**。

$$u_0 \frac{w_0}{w}$$

z 轴上的振幅， u_0 是束腰位置的振幅。

$$\Phi = kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2z \left[1 + \left(\frac{kw_0^2}{2z} \right)^2 \right]} - \varphi$$

光束波阵面是等相位面，由相位 Φ =常数确定。

当 $z=0$ 时， $\Phi=0$ ，说明 $z=0$ 平面是一个波阵面，即光束腰部波阵面与 z 轴垂直。

当远离束腰部位 $z \gg kw_0^2$ $\varphi \rightarrow \pi/2$

$$z + \frac{x^2 + y^2}{2z} = \text{常数}$$

再由 $z^2 \gg x^2 + y^2$

再由 $z^2 \gg x^2 + y^2$

$$\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}$$

所以等相位面方程可写为

$$z\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \text{常数}$$

即 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \approx \text{常数}$

因此，在远处波阵面变为以束腰中心为球心的一个球面。总的波阵面就是从腰部的平面逐渐过渡到远处的球面形状。

另外，在远处 $z \gg kw_0^2$

$$w(z) \approx \frac{2z}{kw_0}$$

波束发散角由 $\tan \theta = w/z$ 确定，所以

$$\tan \theta \approx \frac{2}{kw_0}$$

对应一给定波长的电磁波，当 w_0 愈小时，发散角愈大。因此，要求良好的聚焦效果，发散角必须足够大；如果要求良好定向，则光束宽度不能太小。

$$\Delta k_{\perp} \cdot w_0 \approx O(1)$$

高斯光束示意图

