

第五章 电磁波的辐射

Electromagnetic Wave Radiation

本章所研究的问题是电磁波的辐射。方法和稳恒场情况一样，当考虑由电荷、电流分布激发电磁场的问题时，引入势的概念来描述电磁场比较方便。

本章首先把势的概念推广到一般变化电磁场情况，然后通过势来解辐射问题。

本章主要内容

电磁场的矢势和标势

推迟势

电偶极辐射

电磁波的干涉和衍射

电磁场的动量

§ 5.1 电磁场的矢势和标势

Vector and Scalar Potential of Electromagnetic

1、用势 $\vec{A}$, φ 描述电磁场

为简单起见，讨论真空中的电磁场：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} .$$

针对磁场

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

引入

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$\vec{A}$ 的物理意义可由下式看出：

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

即在任一时刻，矢量 $\vec{A}$ 沿任一闭合回路 L 的线积分等于该时刻通过以 L 为边线的曲面 S 的磁通量。

对于电场 $\vec{E}$ 不能像静电场那样直接引入电势。由 Faraday 电磁感应定律可得：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \rightarrow$$

是标势不
是静电势

即

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

电磁场和势之间的关系如下

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

注意：

a) 当 $\vec{A}$ 与时间无关，即 $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ 时，且 $\vec{E} = -\nabla \varphi$
这时 φ 就直接归结为电势；

b) 绝对不要把 $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 中的标势 φ

与电势 $\varphi(\vec{E} = -\nabla \varphi)$ 混为一谈。因为在非稳恒情况下， $\vec{E}$ 不再是保守力场，不存在势能的概念，这就是说现在的 φ ，在数值上不等于把单位正电荷从空间一点移到无穷远处电场力所做的功。为了区别于静电场的电势，把这里的 φ 称为标势 (Scalar potential)。

c) 在时变场中，磁场和电场是相互作用着的整体，必须把矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 作为一个整体来描述电磁场。

2、规范变换和规范不变性

虽然 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ ，以及 $\vec{A}$ 和 φ 是描述电磁场的两种等价的方式，但由于 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 和 $\vec{A}$ 、 φ 之间是微分方程的关系，所以它们之间的关系不是一一对应的，这是因为矢势 $\vec{A}$ 可以加上一个任意标量函数的梯度，结果不影响 $\vec{B}$ ，而这个任意标量函数

的梯度对 $\vec{E}$ 要发生影响，但将
$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

中的 φ 与此融合也作相应的变换，则仍可使 $\vec{E}$ 保持不变。

设 ψ 为任意的标量函数，即 $\psi = \psi(\vec{x}, t)$ ，作下述变换式：

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

于是我们得到了一组新的 $\vec{A}'$ 、 φ' ，很容易证明：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A}' &= \nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) \\ &= \nabla \times \vec{A} = \vec{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} &= -\nabla \left(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla \psi) \\ &= -\nabla \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \psi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \psi) \\ &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}\end{aligned}$$

由此可见, $(\vec{A}', \varphi')$ 和 $(\vec{A}, \varphi)$ 描述同一电磁场。

a) 库仑规范(Coulomb gauge)

库仑规范条件为 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，即规定 $\vec{A}$ 是一个有旋无源场（横场）。这个规范的特点是 $\vec{E}$ 的纵场部分完全由 φ 描述（即 $-\nabla\varphi$ 具有无旋性），横场部分由 $\vec{A}$ 描述（即 $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 具有无源性）。由

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

可见， $-\nabla\varphi$ 项对应库仑场 $\vec{E}_{\text{库}}$ ， $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 对应着感应

场 $\vec{E}_{\text{感}}$ 。

b) 洛伦茨规范(Lorenz gauge)

洛伦茨规范条件为 $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ，即规

定 $\vec{A}$ 是一个有旋有源场（即 $\vec{A}$ 包含横场和纵场两部分），这个规范的特点是把势的基本方程化为特别简单的对称形式。

3、达朗贝尔(d' Alembert)方程

从Maxwell's equations

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

出发推导矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 所满足的方程，得到：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j} \\ \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

a) 采用库仑规范 $(\nabla \cdot \vec{A} = 0)$

上述方程化为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = -\mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

b) 采用洛伦茨规范 $(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0)$

上述方程化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \end{array} \right.$$

这就是所谓达朗贝尔（ d' Alembert ）方程。

4、举例讨论

试求单色平面电磁波的势

Solution:

单色平面电磁波在没有电荷，电流分布的自由空间中传播，因而势方程（达朗贝尔方程在Lorentz规范条件下）变为波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

其解的形式为：

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \\ \vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \end{cases}$$

由**Lorenz**规范条件 $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 即得

$$i\vec{k} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} (-i\omega\varphi) = 0$$

$$\varphi = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A}$$

这表明，只要给定了 $\vec{A}$ ，就可以确定单色平面电磁波，这是因为：

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times (\vec{A}_{\text{横}} + \vec{A}_{\text{纵}}) \\
 &= i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} + i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{纵}} \\
 &= i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} \quad \rightarrow 0 \text{ (对于单色平面波而言)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\vec{k} \varphi + i\omega \vec{A} \\
 &= -i\vec{k} \left(\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A} \right) + i\omega \vec{A} \\
 &= -i \frac{c^2}{\omega} \left[\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{A}) - k^2 \vec{A} \right] \\
 &= -i \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A})
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}$$

$$= -c\hat{n} \times \vec{B}$$

如果取 $\vec{A} = \vec{A}_{\text{横}}$ ，即只取 $\vec{A}$ 具有横向分量，那么有

$$\vec{k} \cdot \vec{A} = \vec{k} \cdot \vec{A}_{\text{横}} = 0$$

从而得到：

$$\varphi = \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

因此有：

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} = i\omega \vec{A}_{\text{横}} \end{cases}$$

其中： $(\vec{k} \cdot \vec{A} = 0)$

如果采用库仑规范条件，势方程在自由空间中变为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = 0 \end{cases}$$

当全空间没有电荷分布时，库仑场的标势 $\varphi = 0$ ，
则只有

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

其解的形式为

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

由库仑规范条件得到

$$\nabla \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$$

即保证了 $\vec{A}$ 只有横向分量，即 $\vec{A} = \vec{A}_{\text{横}}$ ，从而得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}_{\text{横}} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{A} = i\omega \vec{A}_{\text{横}} \end{array} \right. \quad (\nabla \cdot \vec{A} = 0)$$

通过例子可看到：

库仑规范的优点是：它的标势 φ 描述库仑作用，可直接由电荷分布 ρ 求出，它的矢势 $\vec{A}$ 只有横向分量，恰好足够描述辐射电磁波的两种独立偏振。

洛伦茨规范的优点是：它的标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 构成的势方程具有对称性。它的矢势 $\vec{A}$ 的纵向部

分和标势 φ 的选择还可以有任意性，即存在多余的自由度。尽管如此，它在相对论中显示出协变性。因此，本书以后都采用洛伦茨规范。

§ 5.2 推迟势

Retarded Potential

本节主要是求解达朗贝尔 (d' Alembert)
方程，并阐明其解的物理意义。

1、达朗贝尔方程的解

不管是矢势 $\vec{A}$ 还是标势 φ ，在 Lorentz 规范条件下都满足同样的达朗贝尔方程。而达朗贝尔方程式是线性的，它反映了电磁场的叠加性，故交变电磁场中的矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 均满足叠加原理。因此，对于场源分布在有限体积内的势，可先求出场源中某一体积元所激发的势，然后对场源区域积分，即得出总的势。又因矢势 $\vec{A}$ 的方程与标势 φ 的方程在形式上相同，故只需求出 φ 的方程的解即可。

根据标势 φ 所满足的方程:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

设坐标原点处有一假想变化电荷 $Q(t)$ ，其电荷体密度为 $\rho(\vec{x}, t) = Q(t)\delta(\vec{x})$ ，此时电荷辐射的势的达朗贝尔方程为

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)\delta(\vec{x})$$

除在 origin 以外的空间 $\rho = 0$ ，因而得到

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

因为点电荷的场分布是球对称的，若以 r 表示源点到场点的距离，则 φ 不依赖于角变量，只依赖于 r 和 t 。也就是说， φ 与 θ 和 ϕ 无关，仅是 r 和 t 的函数，即

$$\varphi = \varphi(r, t)$$

而且除原点外， φ 满足波动方程

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (r \neq 0)$$

上式的解是球面波，考虑到 r 增大时势 φ 减弱，

所以作如下代换

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} u(r, t)$$

将此代入上式即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

这个方程式是一维空间的齐次波动方程，其通解为

$$u(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

式中的 f 和 g 是两个任意函数，故有

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} \left[f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \right]$$

此解的第一项表示由场源向外辐射的球面波，第二项则表示向场源会聚的球面波。式中 f 和 g 是 $(t - \frac{r}{c})$ 和 $(t + \frac{r}{c})$ 的任意函数。其具体形式由场源

条件而定。当我们研究辐射时，电磁场是由原点处的电荷发出的，它必然是向外发射的波。因此在辐射问题中应取 $g=0$ ，而函数 f 的形式应由原点处的电荷变化形式决定。

为此，考察上述解过渡到恒定场的情况，即取 $g=0$ ， $c \rightarrow \infty$ ，则

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} f(t)$$

将该式与恒定场中 Q 所激发的电势

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

比较，则得

$$f(t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0}$$

因此在交变电磁场中应有相似的解，即

$$f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

故交变场源 $Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$ 所激发的势为

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} Q\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

如果点电荷不在原点处，而是在 $\vec{x}'$ 点上，令 r 为 $\vec{x}'$ 点到场点 $\vec{x}$ 的距离，有

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{Q(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{4\pi\epsilon_0 r}$$

如果场源电荷分布在有限体积 V 内，对于一般变化电荷分布 $\rho(\vec{x}', t)$ ，它所激发的标势为：

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

因矢势 $\vec{A}$ 的微分方程与标势 φ 的微分方程相似，故其解也相似，所以一般变化电流分布 $\vec{j}(\vec{x}', t)$

所激发的矢势为:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

2、推迟势 (Retarded Potential)

达朗贝尔方程的解为:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})}{r} d\tau'$$

它给出了分布在有限体积内的变化电荷与变化电流在空间任意点所激发的标势 φ 的矢势 $\vec{A}$ 。必须强调指出，该式中的 $\vec{x}$ 表示场点坐标， $\vec{x}'$ 表示源点坐标。

$\varphi(\vec{x}, t)$ 和 $\vec{A}(\vec{x}, t)$ 分别表示 t 时刻在 $\vec{x}$ 点处的标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 的值， $\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 和 $\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$

分别表示 $t' = t - \frac{r}{c}$ 时刻在 $\vec{x}'$ 处的 ρ 和 $\vec{j}$ 的值。

值得注意的是：电荷密度 $\rho(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 和电流密度 $\vec{j}(\vec{x}', t - \frac{r}{c})$ 中的时刻是 t' 而不是 t 。这说明： t' 时刻在 $\vec{x}'$ 处电荷或电流产生的场并不能在同一时刻 t' 就到达 $\vec{x}$ 点，而是要一个传输时间 Δt ，而且 $\Delta t = t - t' = \frac{r}{c}$ ，由于 $t > t'$ ，故 t 时刻的势 φ 和 $\vec{A}$ 是晚于场源辐射的时刻 t' ，因此将此时的 φ 和 $\vec{A}$ 称为推迟势。

综上所述，推迟势的重要性在于说明了电磁作用是以有限速度 $v = c$ 向外传播的，它不是瞬时超距作用。换句话说：电荷、电流辐射电磁波，而电磁波以速度

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

脱离电荷、电流向外传播。这就是推迟势所描写的物理过程。

3、推迟势满足Lorentz条件

利用电荷守恒定律，我们可以验证推迟势满足Lorentz规范条件。

推导

已知电磁场的势为

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}', t')}{r} d\tau'$$
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau'$$

式中 $t' = t - \frac{r}{c}$

$$r = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$$

则有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) d\tau'\end{aligned}$$

其中

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') = \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{t'=\text{常数}} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

||

0 这是因为微分只对 $\vec{x}$ 进行的

则

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') = \nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}'=\text{常数}}$$

而

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}' = \text{常数}} &= \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \\&= \frac{\partial j_x}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} \\&= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial j_x}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\&= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla r\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla r + \vec{j} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{cr} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla' r - \vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{r} \right) d\tau'\end{aligned}$$

这里对 r 的函数而言，有 $\nabla = -\nabla'$ 。

又因为

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') &= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} + \nabla' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t') \Big|_{\vec{x}'=\text{常数}} \\&= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} + \frac{\partial j_{x'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x'} + \frac{\partial j_{y'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial y'} + \frac{\partial j_{z'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z'} \\&= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial j_{x'}}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial x'} + \frac{\partial j_{y'}}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial y'} + \frac{\partial j_{z'}}{\partial t'} \frac{\partial r}{\partial z'} \right) \\&= \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla' r\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t'} \cdot \nabla' r = \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \nabla' \cdot \vec{j}$$

于是

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \left(\frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \nabla' \frac{1}{r} \right) \right] d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} - \nabla' \cdot \frac{\vec{j}}{r} \right] d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{j}}{r} \cdot d\vec{S}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常数}} d\tau' \end{aligned}$$


另外：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} d\tau'\end{aligned}$$

由此得到：

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常}} d\tau' + \frac{1}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial t'} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \left(\nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常}} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right) d\tau' = 0\end{aligned}$$

要使上式保持成立（恒等），只有

$$\nabla' \cdot \vec{j} \Big|_{t'=\text{常}} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0$$

即得 $\vec{A}$ 和 φ 的解满足Lorenz条件。

§ 5.3 电偶极辐射

Electric Dipole Radiation

电磁波是以交变运动的电荷系统辐射出来的，在宏观情形电磁波由载有交变电流的天线辐射出来；在微观情形，变速运动的带电粒子导致电磁波的辐射。

本节研究宏观电荷系统在其线度远小于波长情形下的辐射问题。

1、计算辐射场的一般公式

当电流分布 $\vec{j}(\vec{x}', t')$ 给定时，计算辐射场的基础是 $\vec{A}$ 的推迟势：

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}', t')}{r} d\tau'$$

若电流 $\vec{j}(\vec{x}', t')$ 是一定频率 ω 的交变电流，有

$$\vec{j}(\vec{x}', t') = \vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}$$

因此

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega t'}}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{i(kr - \omega t)}}{r} d\tau'\end{aligned}$$

式中 $k = \omega/c$ 为波数

如果令 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 且有

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} d\tau'$$

式中因子 e^{ikr} 是推迟作用因子，它表示电磁波传到场点时有相位滞后 kr 。

根据 Lorentz 条件，可求出标势 φ ：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A}$$

由此可见，由矢势 $\vec{A}$ 的公式完全确定了电磁场。

另外，根据电荷守恒定律 $\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 且有 $\nabla \cdot \vec{j} = i\omega\rho$ ，只要给定电流 $\vec{j}$ ，则电荷分布 ρ 也自然确定了。从而标势 φ 也就随之而确定了，因而在这种情况下，有

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} d\tau' \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c^2 \nabla \cdot \vec{A} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right.$$

在电荷分布区域外面, $\vec{j} = 0$, 所以

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$$

故得

$$\vec{E} = \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B}$$

2、矢势 $\vec{A}$ 的展开式

对于矢势

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') e^{ikr}}{r} d\tau'$$

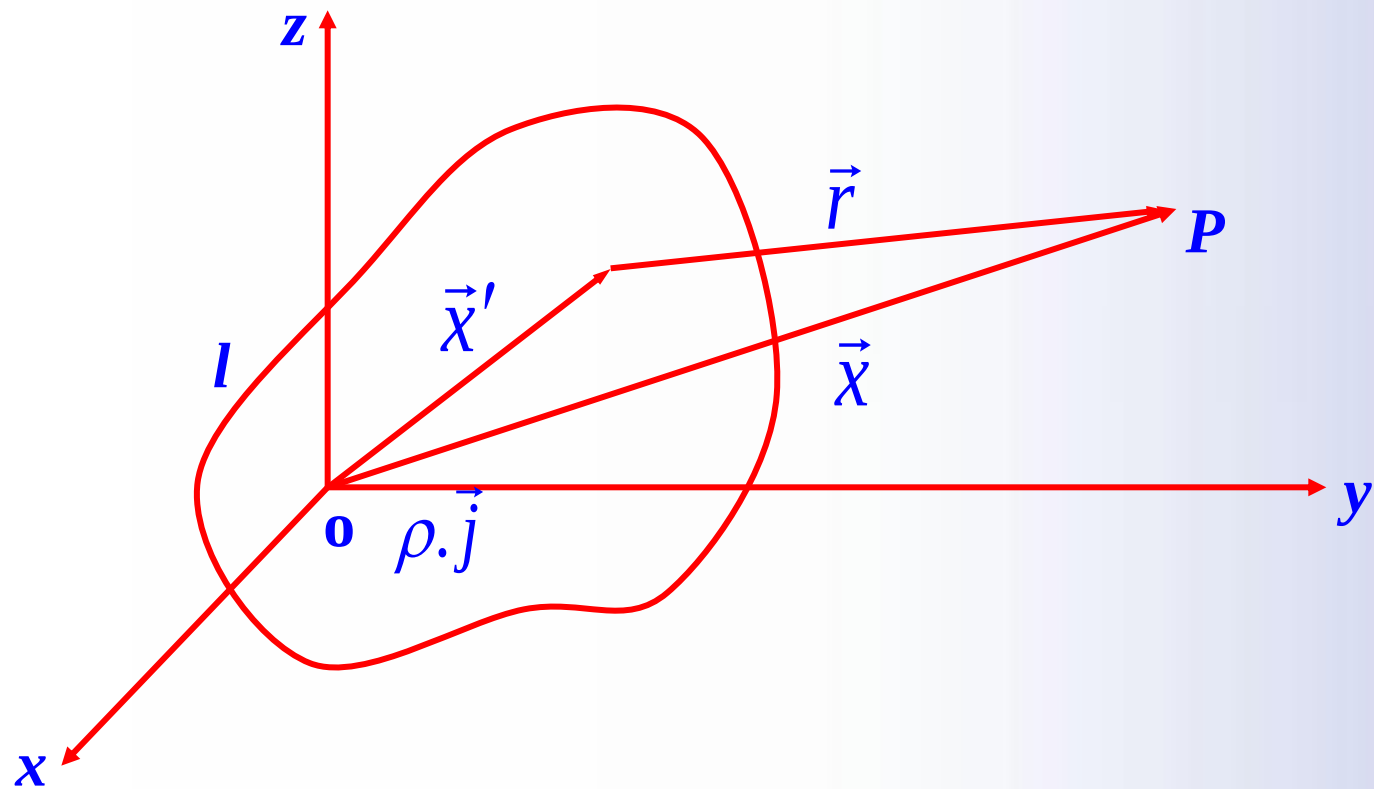
a) 近区（似稳区） $r \ll \lambda$ ，但仍满足 $r \gg l$ 且有 $kr \ll 1$ ，推迟因子 $e^{ikr} \sim 1$ ，因而场保持稳恒场的主要特点，即电场具有静电场的纵向形式，磁场也和稳恒场相似。

b) 感应区（过渡区）， $r \sim \lambda$ ，但满足 $r \gg l$ 。这个区域是一个过渡区域。它介于似稳区和辐射区的过渡区域中。

c) 远区（辐射区） $r \gg \lambda$ ，而且也保证 $r \gg l$ 。在此区域中场强 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 均可略去 $\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x}'|}$ 的高次项，该区域内的场主要是横向电磁场。

现在主要讨论电流分布于小区域而激发的远

区场。



把相因子对 $k\hat{n} \cdot \vec{x}'$ 展开, 得

$$e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} = 1 - ik\hat{n} \cdot \vec{x}' + \frac{1}{2!} (ik\hat{n} \cdot \vec{x}')^2 + \dots$$

从而得到矢势 $\vec{A}$ 的展开式为:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left[1 - ik\hat{n} \cdot \vec{x}' + \frac{1}{2!} (ik\hat{n} \cdot \vec{x}')^2 + \dots \right] d\tau'$$

展开式的各项对应于各级电磁多极辐射。

3、偶极辐射

研究展开式的第一项: 推导

$$\vec{A}_{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') d\tau'$$

由于

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}} &= \int_V \dot{\rho} \vec{x}' d\tau' = - \int_V (\nabla' \cdot \vec{j}) \Big|_{t'=\text{常数}} \vec{x}' d\tau' \\ &= - \int_V \nabla' \cdot (\vec{j} \vec{x}') d\tau' + \int_V (\vec{j} \cdot \nabla') \vec{x}' d\tau' \\ &= - \oint_S \vec{j} \vec{x}' \cdot d\vec{s}' + \int_V \vec{j} \cdot \vec{I} d\tau' \end{aligned}$$

由于积分区域包含了全部电荷、电流存在的空间，

因而在包围该区域的边界面上不可能有电流出去，即S面 $\vec{j} = 0$ ，从而有

$$\dot{\vec{P}} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{I} d\tau' = \int_V \vec{j} d\tau'$$

故得

$$\vec{A}_{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \dot{\vec{P}}$$

现在讨论计算辐射场的技巧问题：

在计算辐射场时，需要对 $\vec{A}$ 作用算符 ∇ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$

由于讨论远区场时，只保留 $\frac{1}{R}$ 的最低次项，因而算符 ∇ 不需作用到分母上，而仅需作用到相因子 e^{ikR} 上即可达到要求，作用结果相当于代换：

$$\nabla \rightarrow ik\hat{n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega.$$

由此得到，辐射场为

推导

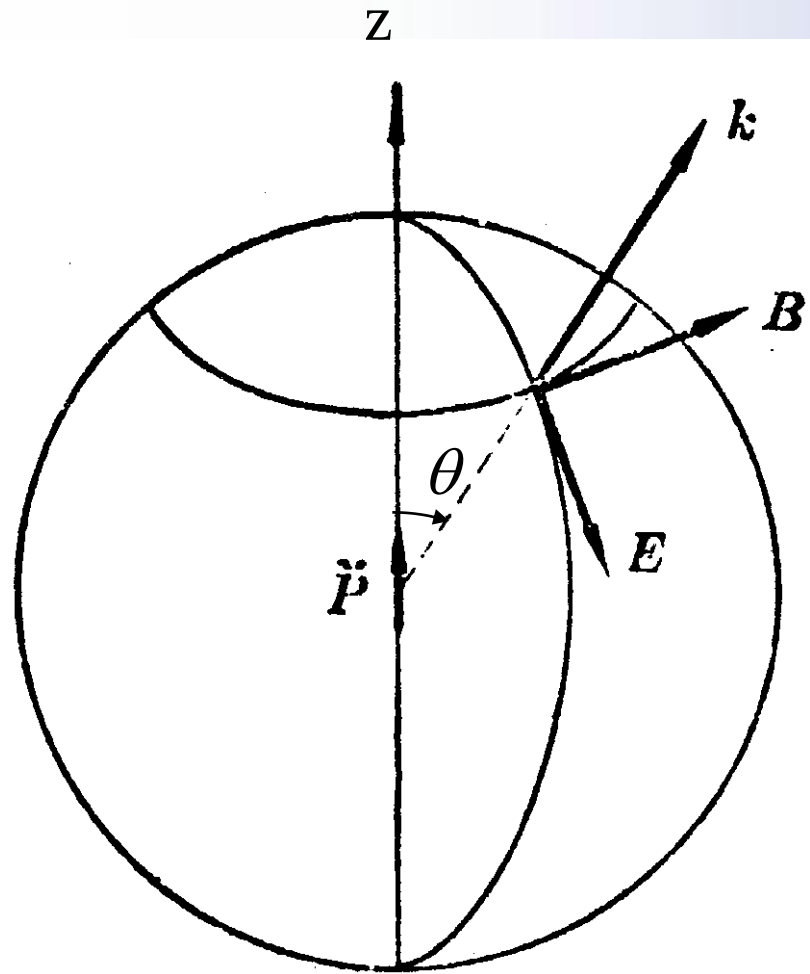
$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = ik\hat{n} \times \vec{A} \\ &= \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \hat{n} \times \dot{\vec{p}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\mu_0 \frac{\omega}{c}}{4\pi R} e^{ikR} \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}} \\
&= \frac{i \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\omega}{c}}{4\pi R} e^{ikR} \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}} \\
&= \frac{1}{4\pi R c^3 \epsilon_0} e^{ikR} i\omega \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}} \\
&= \frac{1}{4\pi R c^3 \epsilon_0} e^{ikR} \ddot{\vec{p}} \times \hat{\vec{n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{ic}{k} \nabla \times \vec{B} = \frac{ic}{k} ik\hat{n} \times \vec{B} \\
 &= c\vec{B} \times \hat{n} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Rc^2} e^{ikR} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \times \hat{n}
 \end{aligned}$$

如果取球坐标，原点在电荷电流分布区域内，并以 $\vec{p}$ 方向为极轴，则由上式得到：

$\vec{B}$ 沿纬线上振荡， $\vec{E}$ 沿经线上振荡。



故得到：

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} e^{ikR} |\ddot{\vec{p}}| \sin(\theta) \vec{e}_\phi$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} e^{ikR} |\ddot{\vec{p}}| \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

该式表明：

磁力线是围绕极轴的园周， $\vec{B}$ 总是横向的；
电力线是经面上的闭合曲线，由于在空间中
 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ， $\vec{E}$ 线必须闭合。因此 $\vec{E}$ 不可能完全横

向，只有当略去 $\frac{1}{R}$ 的高次项后，才能近似地为横
向。由此得到一个结论：电偶极辐射是空间中的
横磁波（TMW）。

4、辐射性能的几个重要参数

衡量一个带电系统辐射性能的几个重要参数，
是它的辐射功率和辐射角分布，这些问题都可以
通过能流密度求得答案。

a) 辐射场的能流密度

在波动区域中，电磁场能流密度的平均值为

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S} \rangle &= \bar{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu_0} R_e (\vec{E}^* \times \vec{B}) \\
&= \frac{1}{2\mu_0} R_e [c(\vec{B} \times \hat{n})^* \times \vec{B}] \\
&= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n} \\
&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \hat{n}
\end{aligned}$$

b) 辐射场的角分布

所谓辐射场的角分布，就是讨论辐射的方向性，在平均能流密度 $\bar{\vec{S}}$ 中， $\sin^2 \theta$ 因子表示电偶极

辐射的角分布。

辐射角分布 (Angular distribution of radiation) 定义为：在 θ, ϕ 方向单位立体角内平均辐射能流，即

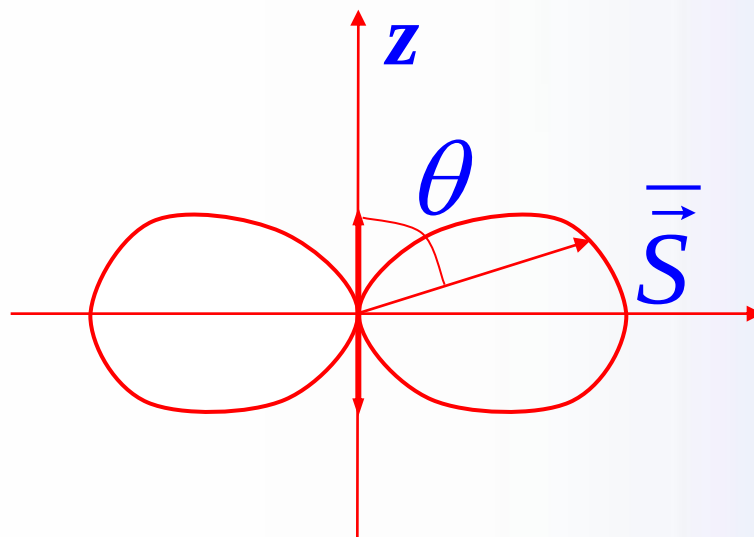
$$\overline{f(\theta \cdot \phi)} = \frac{\vec{S} \cdot d\vec{s}}{d\Omega}$$

当 R 一定时， $\vec{S} \propto \sin^2 \theta$ 。显然

$$\begin{aligned} \overline{f(\theta \cdot \phi)} &= \frac{\vec{S} \cdot R^2 d\Omega \hat{n}}{d\Omega} \\ &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

由此可见

$$\begin{cases} \text{当 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 辐射最强} \\ \text{当 } \theta = 0 \text{ 或 } \pi \text{ 时, 辐射为0} \end{cases}$$



这就是我们在日常生活中，经常通过拨动收音机或电视机天线的方位为获得最佳音响和清晰图象的缘故。

c) 辐射功率

单位时间内通过半径为 R 的球面向外辐射的平均能量，称为辐射功率（Radiation power）。

把 $\vec{S}$ 对球面积分即得总辐射功率，即

推导

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= \oiint_S |\vec{s}| \cdot ds = \oiint_S |\vec{s}| R^2 d\Omega \\
&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \oiint_S \sin^2 \theta d\Omega \\
&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\
&= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} 2\pi \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}
\end{aligned}$$

如果偶极子作简谐振动，角频率为 ω ，且有

$$\vec{p}(\vec{x}, t) = \vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

则

$$\dot{\vec{p}} = -i\omega\vec{p} = -i\omega\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{p}} = -i\omega\dot{\vec{p}} = -i\omega(-i\omega)\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$= -\omega^2\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

从而得到

$$|\ddot{\vec{p}}|^2 = p_0^2\omega^4$$

故

$$\bar{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}$$

若保持电偶极矩的振幅 $\vec{p}_0(\vec{x})$ 不变，则辐射功率正比于频率 ω 的四次方，即频率变化时，辐射功率迅速变化。

§ 5.4 磁偶极辐射和电四极辐射

Radiation of Magnetic Dipole and Electric Quadrupole

1、矢势 $\vec{A}$ 的展开式第二项的物理内容

已知矢势 $\vec{A}$ 的展开式为：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \int_V \vec{j}(\vec{x}') \left[1 - ik\hat{n} \cdot \vec{x}' + \dots \right] d\tau'$$

该式的第一项，属于电偶极辐射，那么第二项到底属于什么的辐射呢？为了弄清这个问题，我们把被积函数写为：

$$\vec{j}(\vec{x}') [\hat{n} \cdot \vec{x}'] = [\hat{n} \cdot \vec{x}'] \vec{j}(\vec{x}') = \hat{n} \cdot \hat{x}' \vec{j}(\vec{x}')$$

标量 → 数

推导

而 $\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}')$ 是一个张量，我们把它分解为对称部分和反对称部分：

$$\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') = \frac{1}{2}[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'] + \frac{1}{2}[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') - \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}']$$

因而 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式的第二项为：

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(2)}(\vec{x}) &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik \int_V \vec{j}(\vec{x}') [\hat{n} \cdot \vec{x}'] d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik \int_V \left\{ \hat{n} \cdot \frac{1}{2} [\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'] \right. \\ &\quad \left. + \hat{n} \cdot \frac{1}{2} [\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') - \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'] \right\} d\tau'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \int_V \frac{1}{2} \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' \right] d\tau' \\
&\quad - \frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \int_V \frac{1}{2} \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') - (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' \right] d\tau'
\end{aligned}$$

第二项: 由于

$$(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') - (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' = -\hat{n} \times (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}'))$$

因此第二项积分部分为:

$$-\hat{n} \times \int_V \frac{1}{2} \vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') d\tau' = -\hat{n} \times \vec{m}$$


 磁偶极矩

该项辐射是磁偶极辐射。

第一项：

把它看成对所有带电粒子求和，则得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + (\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' \right] d\tau' \\ &= \frac{1}{2} \sum e \left[(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{v}(\vec{x}') + (\hat{n} \cdot \vec{v}(\vec{x}')) \vec{x}' \right] \end{aligned}$$

因为 $\vec{v}(\vec{x}') = \frac{d\vec{x}'}{dt}$ ，所以上式可写为：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum e(\hat{n} \cdot \vec{x}') \vec{x}' &= \hat{n} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum e \vec{x}' \vec{x}' \right] \\
&= \frac{1}{6} \hat{n} \cdot \frac{d}{dt} \vec{D} \\
&= \frac{1}{6} \hat{n} \cdot \dot{\vec{D}}
\end{aligned}$$

式中 $\vec{D} = \sum 3e\vec{x}'\vec{x}'$ 是点电荷系的电四极矩。
 该项辐射是电四极矩的辐射。

至此， $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式第二项的物理内容为：

$$\vec{A}_{(2)}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi R} e^{ikR} \left[-\hat{n} \times \vec{m} + \frac{1}{6} \hat{n} \cdot \dot{\vec{D}} \right]$$

即磁偶极辐射和电四极辐射是在 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式中同一级项中出现。

2、磁偶极辐射

为了清楚起见，先计算磁偶极辐射项：

$$\vec{A}_{(2)}^m(\vec{x}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \hat{n} \times \vec{m}$$

在辐射区域中，

$$\vec{m} = \vec{m}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

由此可见

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(2)}^m(\vec{x}) &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\hat{n} \times \vec{m} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \nabla \times \vec{m}\end{aligned}$$

辐射区的电磁场为:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0 k^2}{4\pi R} e^{ikR} (\hat{n} \times \vec{m}) \times \hat{n}\end{aligned}$$

而又因为

$$\dot{\vec{m}} = -i\omega\vec{m} \quad , \quad \ddot{\vec{m}} = -\omega^2\vec{m}.$$

还有 $k^2 = \omega^2 / c^2$

从而得到

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n}$$

而

$$\vec{E} = c \vec{B} \times \hat{n} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n})$$

讨论:

将电偶极辐射场和磁偶极辐射场比较，即

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{电偶极}} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 Rc^2} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \\ \vec{B}_{\text{磁偶极}} &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_{\text{电偶极}} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\epsilon_0 Rc^3} (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \\ \vec{E}_{\text{磁偶极}} &= \frac{-\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \end{aligned} \right\}$$

通过以上比较，有

$$\vec{p}_{\text{电偶极}} \rightarrow \frac{\vec{m}_{\text{磁偶极}}}{c}$$

$$\vec{E}_{\text{电偶极}} \rightarrow c\vec{B}_{\text{磁偶极}}$$

$$c\vec{B}_{\text{电偶极}} \rightarrow -\vec{E}_{\text{磁偶极}}$$

由此可见，磁偶极辐射的能流密度为：

$$\vec{s} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}[(c\vec{B}^* \times \hat{n}) \times \vec{B}]$$

$$= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n}$$

推导

而

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{磁偶极}} &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{n}) \times \hat{n} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} |\ddot{\vec{m}}| \sin \theta \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 |\ddot{\vec{m}}|^2}{16\pi^2 R^2 c^4} \sin^2 \theta \hat{n} \\ &= \frac{\mu_0 (\omega^4 |\vec{m}|^2)}{32\pi^2 R^2 c^3} \sin^2 \theta \hat{n}\end{aligned}$$

其中： $\ddot{\vec{m}} = -\omega^2 \vec{m}$, $|\ddot{\vec{m}}|^2 = \omega^4 |\vec{m}|^2$. $|\vec{m}|^2$ 为磁矩的振幅， θ 为极角（以 $\vec{m}$ 方向为极轴），其辐射图形如电偶极辐射相同。

磁偶极辐射的总辐射功率：

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \oiint_S \vec{s} \cdot d\vec{s} = \oiint_S |\vec{s}| \cdot ds = \oiint_S |\vec{s}| R^2 d\Omega \\ &= \oiint_S \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 R^2 c^3} \sin^2 \theta R^2 d\Omega \\ &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{32\pi^2 c^3} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \\
 &= \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\omega^4 |\vec{m}|^2}{3c^3}
 \end{aligned}$$

3、电四极辐射

这里由 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式第二项计算电四极辐射项：

$$\vec{A}_{(2)}^e(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \hat{n} \cdot \ddot{\vec{D}}$$

为方便计，定义一个矢量 $\vec{D}(\hat{n})$ ：

$$\vec{D}(\hat{n}) = \hat{n} \cdot \ddot{\vec{D}}$$

则矢势为:

$$\begin{aligned}\vec{A}_{(2)}^e(\vec{x}) &= -\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \dot{\vec{D}} = -\frac{i\frac{\omega}{c}\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R} \dot{\vec{D}} \\ &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{24\pi c R} \ddot{\vec{D}} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 R c^3} \ddot{\vec{D}}\end{aligned}$$

辐射区域的电磁场为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = ik\hat{n} \times \vec{A} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 R c^4} \ddot{\vec{D}} \times \hat{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{n} = \frac{e^{ikR}}{24\pi\epsilon_0 R c^3} (\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}) \times \hat{n}$$

相应地辐射平均能流密度为：

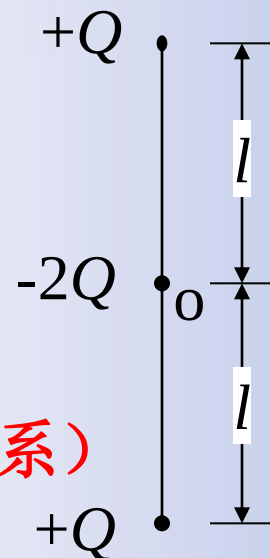
$$\begin{aligned}\vec{s} &= \frac{1}{2} R_e(\vec{E}^* \times \vec{H}) = \frac{1}{2\mu_0} R_e[(c\vec{B}^* \times \hat{n}) \times \vec{B}] \\ &= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5 R^2} |\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}|^2 \hat{n}\end{aligned}$$

4、举例讨论（作业）

例1：短天线辐射。长度为 l 的天线（ $l \ll \lambda$ ）电流分布为线性 $I(z)=I_0(1-2|z|/l)$ ，（ $|z| \leq l/2$ ）角频率为 ω ，求辐射功率。

例2：一电流线圈半径为 a ，激发电流振幅为 I_0 ，角频率为 ω ，求辐射功率。

例3：求如图所示的电四极子以频率 ω 振幅时的辐射功率和角分布。



（请讨论其各自辐射能力随其线度与波长比的关系）

Solution:例2

电流线圈的磁矩为 $m_0 = I_0 \pi a^2$, 即

$$\vec{m}(\vec{x}, t) = \vec{m}_0(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

然而 $\dot{\vec{m}} = -i\omega \vec{m}$

$$\ddot{\vec{m}} = -i\omega \dot{\vec{m}} = (-i\omega)(-i\omega)\vec{m} = -\omega^2 \vec{m}$$

根据磁偶极辐射的辐射功率

$$\bar{p} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

得到

$$\bar{p} = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 (\pi a^2)^2}{12\pi c^3}$$

因为

$$\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} c, \quad \omega^4 = \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4} c^4$$

因此得到

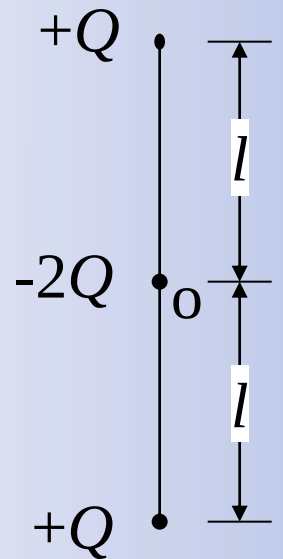
$$\bar{p} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$$

例3： 求如图所示的电四极子以频率 ω 振幅时的辐射功率和角分布。

Solution:

该体系的电四极矩张量为：

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \sum 3e\vec{x}'\vec{x}' \\ &= 3Q\vec{e}_z\vec{e}_zl^2 + 0 + 3Q(-\vec{e}_z)(-\vec{e}_z)l^2 \\ &= 6Ql^2\vec{e}_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

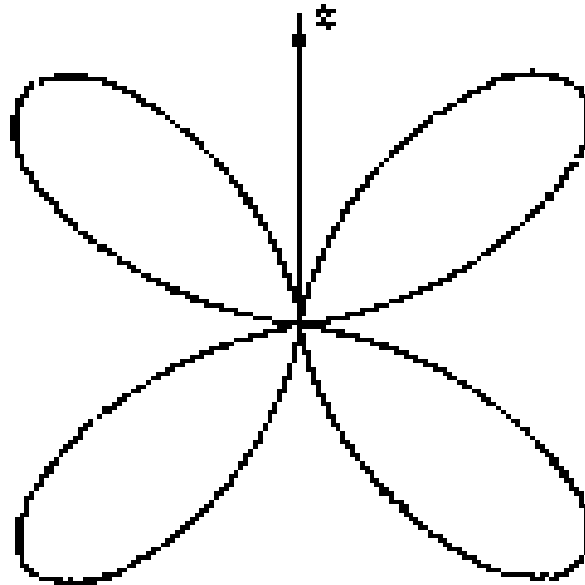


$$\vec{D} = \hat{n} \cdot \vec{D} = 6Ql^2 \hat{n} \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z = 6Ql^2 \cos \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{D} \times \hat{n} = 6Ql^2 \cos \theta \vec{e}_z \times \hat{n} = 6Ql^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$|\ddot{\vec{D}} \times \hat{n}|^2 = 36Q^2 l^4 \omega^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

由此可见，辐射角分布由因子 $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$ 确定，如图所示。



辐射功率为:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \oint_S \vec{s} \cdot d\vec{s} = \oint_S |\vec{s}| ds = \oint_S |\vec{s}| R^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi C^5} 36Q^2 l^4 \omega^6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{因为 } \int_0^\pi \cos^2 \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^\pi \cos^2 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= -\int_0^\pi \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta \\
 &= -\int_0^\pi \cos^2 \theta d \cos \theta + \int_0^\pi \cos^4 \theta d \cos \theta \\
 &= \frac{4}{15}
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \bar{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5} 36Q^2 l^4 \omega^6 \cdot \frac{4}{15} = \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi\epsilon_0 c^5}$$

§ 5.6 电磁波的干涉和衍射

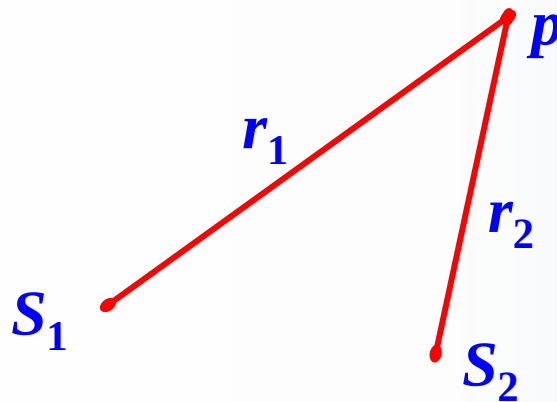
Interference and Diffraction Phenomenon of Electromagnetic Wave

本节所要研讨的是如下两个问题：**第一**、由 **Maxwell's equations** 的线性条件知道，电磁场服从叠加原理，这就是说，当空间有两列以上电磁波同时存在时，空间各点的总场强等于这些电磁波的场强矢量和。讨论叠加现象属于电磁波的**干涉(Interference)**问题；**第二**、电磁波在传播过程中，会绕过障碍物而继续传播，这种现象属于电磁波的**衍射(diffraction)**问题。

1、电磁波的干涉现象

(Interference phenomenon of electromagnetic wave)

设空间有两列电磁波，它们具有相同的振幅和相同的频率，分另由 S_1 、 S_2 、两点同时发出，则在 t 时刻它们在 p 点的电场强度分别为：



$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t)} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}_1 - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \cos(kr_1 - \omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - \omega t)} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x}_2 - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \cos(kr_2 - \omega t)\end{aligned}$$

p点的总场强为：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= \vec{E}_0 \cos(kr_1 - \omega t) + \vec{E}_0 \cos(kr_2 - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)]\end{aligned}$$

根据三角函数关系式，即得

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot 2 \cos \pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2 + r_1}{2\lambda} \right)$$

令 $\Delta = r_2 - r_1$ ，称为光程差，故得

$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos \pi \frac{\Delta}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right)$$

讨论：

a) 合成振幅与光程差有关，当 $\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2n \cdot \frac{\pi}{2}$

时，振幅最大为 $2\vec{E}_0$ ；当 $\pi \frac{\Delta}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$ 时，即

$\Delta = (2n+1)\lambda / 2$ 时，振幅最小为0，这说明：叠加的结果电场强度的振幅在空间一些地方加强了，另一些地方减弱了这种现象叫做干涉 (Interference)。

b) 当光程差为半光波长的偶数倍时，合成波振幅最大；当光程差为半波长的奇数倍时，合成波振幅为0。这可以解释物理光学中的干涉现象，也足以说明电磁波包含了一定频段范围的光波。

2、电磁波的干涉条件

是否任何两个电磁波都能产生干涉呢？答案是否定的。要产生干涉，必须满足一定的条件。

a) 它们的电场强度和磁场强度都必须分别具有相同的振动方向。

b)它们的频率必须相同。

c)两列波的光程差不能太大。

d)两列波的振幅不能悬殊太大。

上述四个干涉条件，在物理光学中叫做**相干条件** (Condition of coherence)。

3、电磁波的衍射

当电磁波在传播过程中遇到障碍物或者透过屏幕上的小孔时，会导致偏离原来入射方向的出射电磁波，这种现象称为**衍射现象** (diffraction phenomenon)。衍射现象的研究对于光学和无线电波的传播都是很重要的。

a) 亥姆霍兹方程(Helmholtz's equation)

在无源空间中，电磁场 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 满足的方程为

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

$$k = \omega / v$$

b) 格林函数 (Green's function)

和静电场情形一样, 设 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 是亥姆霍兹方程相应的格林函数:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = G(x, y, z; x', y', z') = \frac{e^{ikr}}{r}$$

式中 $r = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}$

由于 $\nabla^2 G = \nabla^2 \frac{e^{ikr}}{r}$

推导 $= \frac{1}{r} \nabla^2 e^{ikr} + 2(\nabla \frac{1}{r}) \cdot (\nabla e^{ikr}) + e^{ikr} \nabla^2 \frac{1}{r}$

而

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \nabla^2 e^{ikr} + 2 \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot (\nabla e^{ikr}) \\
 &= \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} e^{ikr} \right) - 2 \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \cdot (i k e^{ikr} \frac{\vec{r}}{r}) \\
 &= -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} = -k^2 G
 \end{aligned}$$

又因为

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{当 } r \neq 0 \\ \infty & \text{当 } r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{且} \quad \int_V \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau &= \int_V \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} d\tau = \oint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\vec{s} \\
 &= -\oint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s} = -\oint_S d\Omega = -4\pi
 \end{aligned}$$

由此得到：

$$\nabla^2 G + k^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

注意：

亥姆霍兹方程是无源空间的波动方程，而格林函数所满足的方程是单位源集中在 $\vec{x}'$ 点波动方程。因此两者相同的是：它们都是波动方程；不同的是：一是无源方程，一是点源方程。

c) 格林公式(Green's formula)

把 G 和 ψ 代入到格林公式中，并以带撇号表示积分变量，则有

$$\begin{aligned} & \int_V [\psi(\vec{x}') \nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla'^2 \psi(\vec{x}')] d\tau' \\ &= \oiint_S [\psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}')] \cdot d\vec{s}' \end{aligned}$$

其中 $d\vec{s}$ 是从区域 V 内指向外部的面元，如果设 $\hat{n}$ 是指向区域 V 内的法线，则

$$d\vec{s}' = -\hat{n} ds'$$

上式成为:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\psi(\vec{x}') \nabla'^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla'^2 \psi(\vec{x}') \right] d\tau' \\ &= \oiint_S \left[G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) \right] \cdot \hat{n} ds' \end{aligned}$$

这就是格林公式。

d) 基尔霍夫公式(Kirchhoff's formula)

把格林公式中的函数 $\psi(\vec{x}')$ ，看作是我们寻找的、描述电磁场的、满足亥姆霍兹方程的标量函数 $\psi(\vec{x})$ ，把 G 看成是已知的，是满足 $\nabla^2 G + k^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ 的格林函数。

因为

$$\begin{aligned}\nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) &= \nabla' \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} \nabla' e^{ikr} + e^{ikr} \nabla' \frac{1}{r} \\ &= -ikG \frac{\vec{r}}{r} + G \frac{\vec{r}}{r^2}\end{aligned}$$

将此代入格林公式中，得

$$\begin{aligned}& \int_V \left\{ \psi(\vec{x}') \left[-k^2 G(\vec{x}', \vec{x}) - 4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') \right] - G(\vec{x}', \vec{x}) \left[-k^2 \psi(\vec{x}') \right] \right\} d\tau' \\ &= \oiint_S \left\{ G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \left[-ikG(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r} + G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r^2} \right] \right\} \cdot \hat{n} ds'\end{aligned}$$

展开后，等式左边为

$$\int_V -\psi(\vec{x}') 4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}') d\tau' = -4\pi \psi(\vec{x})$$

所以

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{ G(\vec{x}', \vec{x}) \nabla' \psi(\vec{x}') - \psi(\vec{x}') \left[-ik G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G(\vec{x}', \vec{x}) \frac{\vec{r}}{r^2} \right] \right\} \cdot \hat{n} d\bar{s} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \left[\nabla' \psi(\vec{x}') + \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \psi(\vec{x}') \right] ds'\end{aligned}$$

这就是基尔霍夫公式。

讨论：

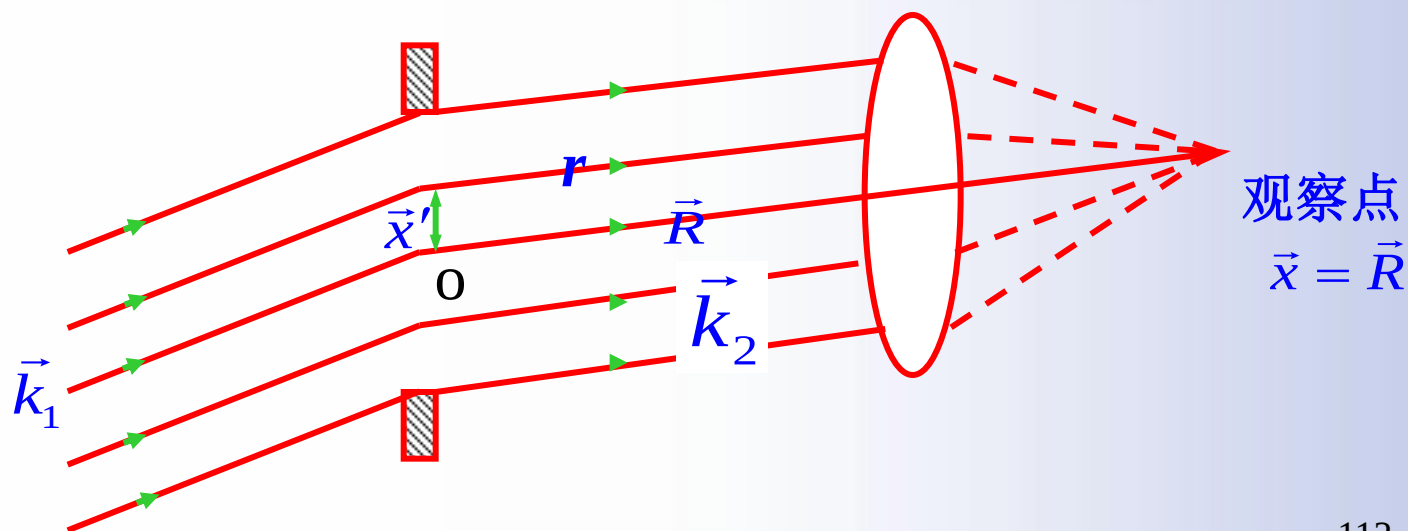
① 公式把区域 V 内任一点 $\vec{x}$ 处的场 $\psi(\vec{x})$ 用 V 的边界面 S 上的 $\psi(\vec{x}')$ 和 $\frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n}$ 表示出来，是惠更斯原理的数学表示。

② 公式中的因子 $\frac{e^{ikr}}{r}$ 表示曲面 S 上的点 $\vec{x}'$ 向 V 内 $\vec{x}$ 点传播的波。波源的强度由 $\vec{x}'$ 点上的 $\psi(\vec{x}')$ 和 $\frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n}$ 值确定。因此，曲面上每一点可以看作次级光源发射的波的叠加。

③ 公式不是边值问题的解，它仅是把 ψ 用边值表示出的积分表达式。

e) 矩形孔的夫琅和费衍射

夫琅和费衍射(Fraunhofer's diffraction)指的是：一平行光线入射到矩形孔上，发生衍射，根据实际情况，设矩形孔的边长为 $2a$ 和 $2b$ ，除矩形孔外，其它部分不透光。



因此，基尔霍夫公式中对闭合面的积分，只对矩形孔积分：

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{孔}} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \cdot \left[\nabla' \psi + \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \psi \right] ds'$$

假设在孔面上，入射波是平面波，波矢量为 $\vec{k}_1'$ ，即

$$\psi(\vec{x}') = \psi_0 e^{i\vec{k}_1' \cdot \vec{x}'}$$

其中： ψ_0 为原点处 $\psi(\vec{x}')$ 的值。

$$\nabla' \psi(\vec{x}') = i\vec{k}_1 \psi_0 e^{i\vec{k}_1' \cdot \vec{x}'} = i\vec{k}_1 \psi(\vec{x}')$$

由于 $\vec{k}_1'$ 和 $\vec{k}_2'$ 的方向不同，但由于衍射不改变波的

频率和波长，可见 k_1 和 k_2 的大小却应该相等，即 $k_1 = k_2 = k$ ，因此有

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + x'^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{x}' \\ r &= R \left(1 + \frac{x'^2}{R^2} - \frac{2\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} \right)^{1/2} \\ &= R \left(1 - \frac{2\hat{n} \cdot \vec{x}'}{R} + \frac{x'^2}{R^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

展开得到:

$$\begin{aligned} r &= R \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2\hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}'}{R} + \dots \right) \\ &= R - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}' = R - \frac{\vec{k}_2}{k_2} \cdot \vec{x}' = R - \frac{\vec{k}_2}{k} \cdot \vec{x}' \end{aligned}$$

这里 $\frac{\vec{k}_2}{k} = \hat{\vec{n}}$ 是由孔面指向观察点的, $\frac{\vec{r}}{r} = \hat{\vec{n}}$ 是由积分面指向观察点的。

把z轴与孔垂直，这时且有

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{孔}} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{n} \left[i\vec{k}_1 \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} + \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} \right] ds'$$

略去 $\frac{1}{r}$ 高次项，得

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\text{孔}} \frac{e^{ik(R - \frac{\vec{k}_2}{k} \cdot \vec{x}')}}{R - \frac{\vec{k}_2}{k} \cdot \vec{x}'} \hat{n} \cdot \left[i\vec{k}_1 \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} + ik \psi_0 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}'} \frac{\vec{k}_2}{k} \right] dx' dy' \\ &= -\frac{1}{4\pi R} i \psi_0 e^{ikR} \iint e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}'} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \hat{n} dx' dy' \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \iint_{\text{孔}} e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}'} dx' dy' &= \int_{-a}^a dx' e^{i(k_{1x} - k_{2x})x'} \int_{-b}^b dy' e^{i(k_{1y} - k_{2y})y'} \\ &= 4 \frac{\sin(k_{1x} - k_{2x})a}{k_{1x} - k_{2x}} \cdot \frac{\sin(k_{1y} - k_{2y})b}{k_{1y} - k_{2y}} \end{aligned}$$

所以得到:

$$\psi(\vec{x}) = -\frac{i\psi_0 e^{ikR}}{4\pi R} (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \hat{n} 4 \frac{\sin(k_{1x} - k_{2x})a}{k_{1x} - k_{2x}} \cdot \frac{\sin(k_{1y} - k_{2y})b}{k_{1y} - k_{2y}}$$

而且，光强 I 和振幅的模平方成正比，即

$$I \sim |\psi|^2$$

由此可知。

$$I = \frac{\psi_0^2}{\pi^2 R^2} (k_{1z} + k_{2z})^2 \left[\frac{\sin(k_{1x} - k_{2x})a \sin(k_{1y} - k_{2y})b}{(k_{1x} - k_{2x})(k_{1y} - k_{2y})} \right]^2$$

如果用 $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ 、 $(\frac{\pi}{2} - \beta)$ 、 θ 表示 $\vec{k}_2$ 与 x 、 y 、 z 轴的夹角

$$k_{2x} = k_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \sin \alpha$$

$$k_{2y} = k_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = k \sin \beta$$

$$k_{2z} = k_2 \cos \theta = k \cos \theta$$

当光垂直入射到矩形孔面时，有

$$k_{1x} = k_{1y} = 0, \quad k_{1z} = k.$$

故

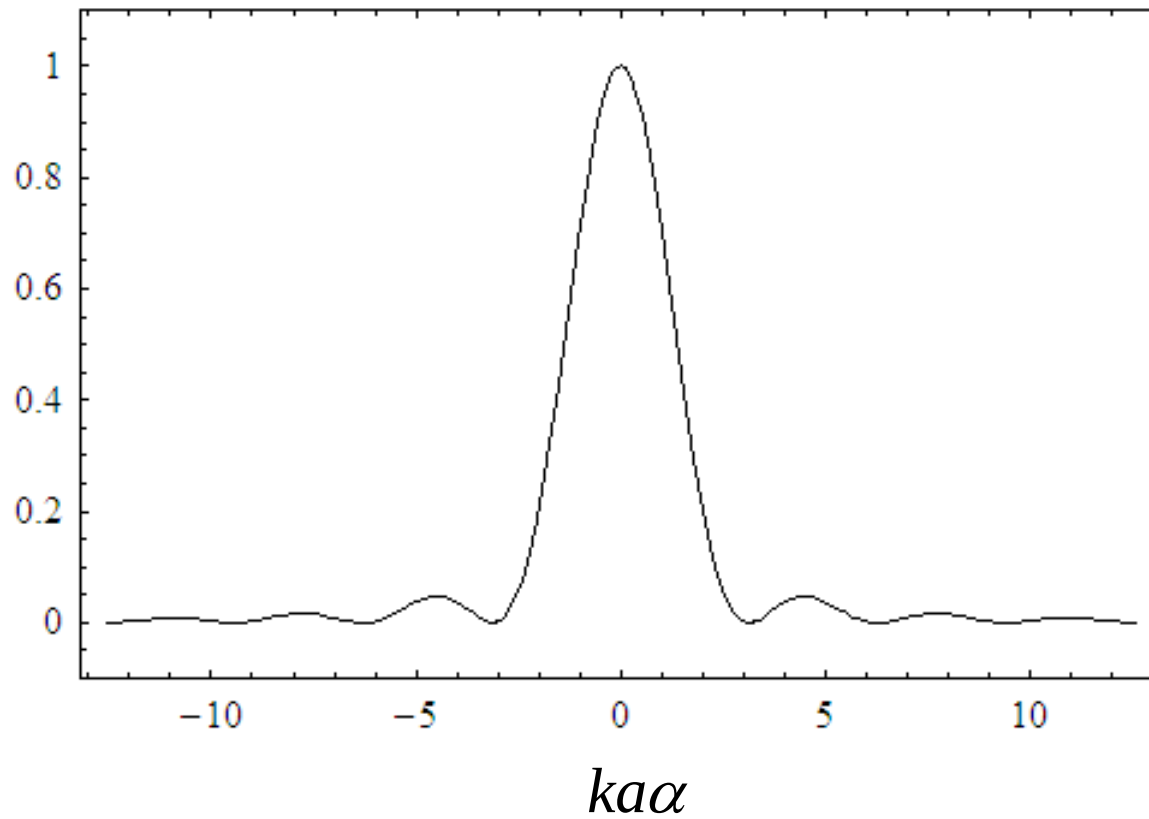
$$I = \frac{\psi_0^2 k^2}{\pi^2 R^2} (1 + \cos \theta)^2 \left[\frac{\sin(ak \sin \alpha) \sin(bk \sin \beta)}{k \sin \alpha \cdot k \sin \beta} \right]^2$$

且在小角度衍射时， α, β 为小角，因而

$$\sin \alpha \approx \alpha, \sin \beta \approx \beta, \cos \theta \approx 1$$

$$I = I_0 (1 + \cos \theta)^2 \left[\frac{\sin(k\alpha a)}{k\alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin(k\beta b)}{k\beta} \right]^2$$

强度分布曲线



补充讨论

菲涅尔—基尔霍夫衍射积分存在一定自我矛盾

屏

S_1

Σ

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \oiint \left[G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_1 - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left[G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1'} \left[G \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_1'\end{aligned}$$

0 , 要求条件 $\psi|_{S_1'} = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{S_1'} = 0$

矛盾!

补充讨论

瑞利—索末菲衍射理论（改造格林函数）

第I类:

$$\psi_{\text{I}}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} \psi \frac{\partial G}{\partial n} d\Sigma$$

第II类:

$$\psi_{\text{II}}(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} G \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Sigma$$

详情参见《高等光学教程》

§ 5.7 电磁场的动量

Momentum of Electromagnetic Field

电磁场和带电体之间有相互作用力。场对带电粒子施以作用力，粒子受力后，它的动量发生变化，同时电磁场本身的状态亦发生相应的改变。因此，电磁场也和其他物体一样具有动量。辐射压力是电磁场具有动量的实验证据。

本节从电磁场与带电物质的相互作用规律出发导出电磁场动量密度表达式。

1、电磁场的动量密度和动量流密度

场对带电体的作用为**Lorentz力**，在Lorentz力作用下带电体的机械动量变化为

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = \int_V \vec{f} d\tau = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) d\tau \quad \text{推导}$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$= \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B}$$

而

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{E} = 0$$

把此式与 $\vec{f}$ 的表达式相加, 则有

$$\begin{aligned}\vec{f} = & \varepsilon_0(\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} \\ & + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \times \vec{B} \\ & + \varepsilon_0(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \times \vec{E}\end{aligned}$$

其中因为：

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} \\ &= (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} + \left[-\frac{1}{2} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} \right] \\ &= \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla(\vec{E} \cdot \vec{E}) \\ &= \nabla \cdot (\vec{E}\vec{E}) - \frac{1}{2} \nabla \cdot (E^2 \vec{I}) \\ &= \nabla \cdot \left(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right) \end{aligned}$$

式中 $\vec{I}$ 是单位张量，即 $\vec{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$ （直角坐标），与 ∇ 方向一致。同理得到：

$$\begin{aligned} & (\nabla \cdot \vec{B})\vec{B} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ &= \nabla \cdot (\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{I}) \end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{H}) \\ &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

这样一来，则有

$$\vec{f} = \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_0 \left[\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \vec{I} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2} B^2 \vec{I} \right] \right\} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}$$

或者化为

$$\vec{f} = -\nabla \cdot \vec{T} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t}$$

其中

$$\vec{T} = -\varepsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\vec{B} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{I}$$

至此，可以把机械动量的变化率写成

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} &= -\int_V \nabla \cdot \vec{T} d\tau - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau \\ &= -\oint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau\end{aligned}$$

讨论：

a) 若积分区域 V 为全空间，则面积分项为零，而

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\infty} \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau$$

根据动量守恒定律，带电体的机械动量的增加等于电磁场的动量的减少，因此称

$$\vec{G}_{\text{电磁}} = \int_{\infty} \frac{1}{c^2} \vec{s} d\tau = \int_{\infty} \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau$$

为电磁动量，而把

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{s} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

称为电磁场动量密度 (electromagnetic field momentum density)。

$$\vec{G}_{\text{机}} + \vec{G}_{\text{电磁}} = \text{constant}$$

注意：对于平面电磁波，有平均动量密度

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 R_e (\vec{E}^* \times \vec{B}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2c} |E|^2 \hat{n} \\ &= \frac{1}{c} w \hat{n}\end{aligned}$$

b) 若积分区域 V 为有限空间，则面积分项不为零，即

$$\frac{d\vec{G}_{\text{机}}}{dt} = -\oiint_S \vec{T} \cdot d\vec{s} - \frac{d}{dt} \int_V \vec{g} d\tau$$

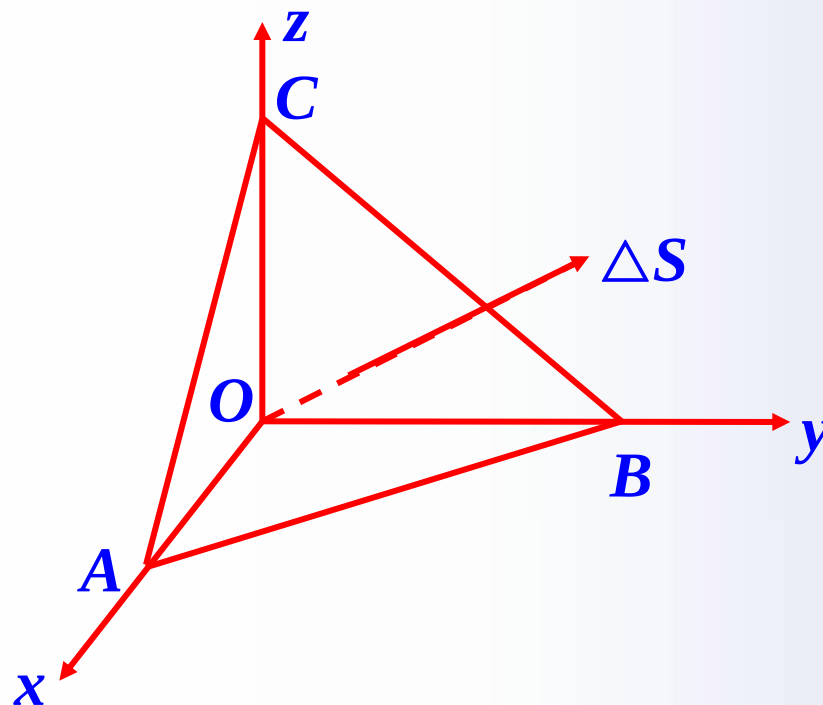
机械动量

动量流

电磁动量

因为等式左边项表示机械动量，右边第二项代表了电磁动量，因此右边第一项也必然具有动量的意义，而它是面积分，所以把它解释为穿过区域 V 的边界面 S 流入体内的动量流。故称 $\vec{T}$ 为**电磁场动量流密度 (electromagnetic field momentum flow density)**，亦称之为Maxwell应力张量或张力张量。

麦克斯韦应力张量分量的具体解释为：



设 ABC 为一面元 $\Delta \vec{S}$ ，这面元的三个分量为三角形 OBC 、 OCA 和 OAB 的面积， $OABC$ 是一个体积元

ΔV ，通过界面 OBC 单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{11}、T_{12}、T_{13}；$$

通过界面 OCA 单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{21}、T_{22}、T_{23}；$$

通过界面 OAB 单位面积流入体内的动量三个分量为：

$$T_{31}、T_{32}、T_{33}；$$

当 $\Delta V \rightarrow 0$ 时，通过这三个面流入体内的动量等

于从面元 ABC 流出的动量。因此，通过 ABC 面流出的动量各分量为：

$$\Delta p_1 = \Delta S_1 T_{11} + \Delta S_2 T_{21} + \Delta S_3 T_{31}$$

$$\Delta p_2 = \Delta S_1 T_{12} + \Delta S_2 T_{22} + \Delta S_3 T_{32}$$

$$\Delta p_3 = \Delta S_1 T_{13} + \Delta S_2 T_{23} + \Delta S_3 T_{33}$$

写成矢量式：

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{S} \cdot \vec{T}$$

这就是通过面元 $\Delta \vec{S}$ 流出的动量。

举例，考虑平面电磁波的动量流密度张量
对于平面波有 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{k}$ 三个矢量互相正交
现在求：

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \vec{T} &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \vec{E} \cdot \vec{I} \\ &= -\varepsilon_0 E^2 \vec{E} + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \vec{E}\end{aligned}$$

再利用：

$$\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$$

$$\vec{E} \cdot \vec{T} = -\varepsilon_0 E^2 \vec{E} + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \varepsilon_0 E^2) \vec{E} = 0$$

同样可以得到:

$$\vec{B} \cdot \vec{T} = 0$$

再来看:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{T} &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{k} \cdot \vec{I} \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \vec{k} = w \vec{k}\end{aligned}$$

所以,

$$\vec{T} = w \vec{e}_k \vec{e}_k$$

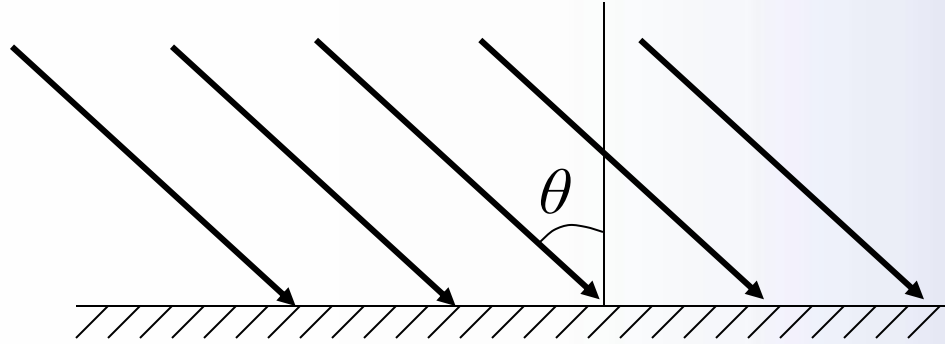
如 $\mathbf{k}$ 方向选择 z 轴, 则 $\vec{T}$ 只有 T_{33} 分量, $T_{33} = cg$

3、辐射压力(Radiation pressure)

电磁场作为物质在流动（辐射）时，一旦遇到其他物体，就会发生相互作用力，由电磁场引起的对其他物体的压力称为辐射压力。如果是可见光引起的辐射压力，通常称之为光的压力。

由电磁场动量密度式和动量守恒定律可以算出**辐射压力**。

假有一平面电磁波的以 θ 角入射于理想导体表面上而被全部反射，试求此导体表面所受到的辐射压力。



导体表面对空间电磁波所施加的作用为，等于单位表面上电磁动量在单位时间内所发生的变化。由于作用力与反作用力大小相等，它的量值就等于电磁波对物体单位表面所施加的压力。由于电磁波的传播速度为 c ，在单位时间内射到单位横截面的电磁动量为：

$$\bar{g} \cdot (c \cdot 1) = \frac{\bar{S}}{c} = \bar{w}$$

设电磁波的入射角为 θ ，则单位时间内射到单位面积上的电磁动量为

$$f_1 = \bar{g}c \cos \theta = \bar{w} \cos \theta$$

同样，在单位时间内被物体单位表面反射的电磁动量为

$$f_2 = R\bar{g}c \cos \theta = R\bar{w} \cos \theta$$

这里的 R 为反射系数。因此，单位时间内动量在法向的变化为：

$$\begin{aligned} P &= f_1 \cos \theta + f_2 \cos \theta \\ &= (1 + R)\bar{g}c \cos^2 \theta = (1 + R)\bar{w} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

即介质表面受到电磁波作用产生的压强，若电磁波在各方向都以同样强度辐射（例如空腔内的黑体辐射），它的总平均辐射能量密度为 $\bar{w}$ ，那么投影到方向在 θ 到 $\theta+d\theta$ 之间的能量密度为：

$$d\bar{w} = \frac{\bar{w}}{4\pi} \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{\bar{w}}{2} \sin \theta d\theta$$

于是介质表面受到各个方向射来的电磁波作用产生的总压力为

$$P = (1 + R) \frac{\bar{w}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1 + R}{6} \bar{w}$$

在理想导体表面，电磁波发生全反射，这时反射系数 $R=1$ ，此时即有

$$P = \frac{1}{3} \bar{w}$$

地球表面由于太阳光辐射而受到的总辐射压力约为 $7 \times 10^8 N$ ，而受到太阳的万有引力为 $3 \times 10^{22} N$ ，因此一般可以忽略辐射压力。