

第六章 狭义相对论

Special Theory of Relativity

相对论的创始人：

Albert · Einstein
(1879----1955)

1905年，狭义相对论

(Special Theory of Relativity)

1916年，广义相对论

(General Theory of Relativity)

第一讲 狭义相对论时空

Time and Space of the Special Theory of Relativity

6.1 相对论的实验基础

一、伽利略相对论原理和伽利略变换

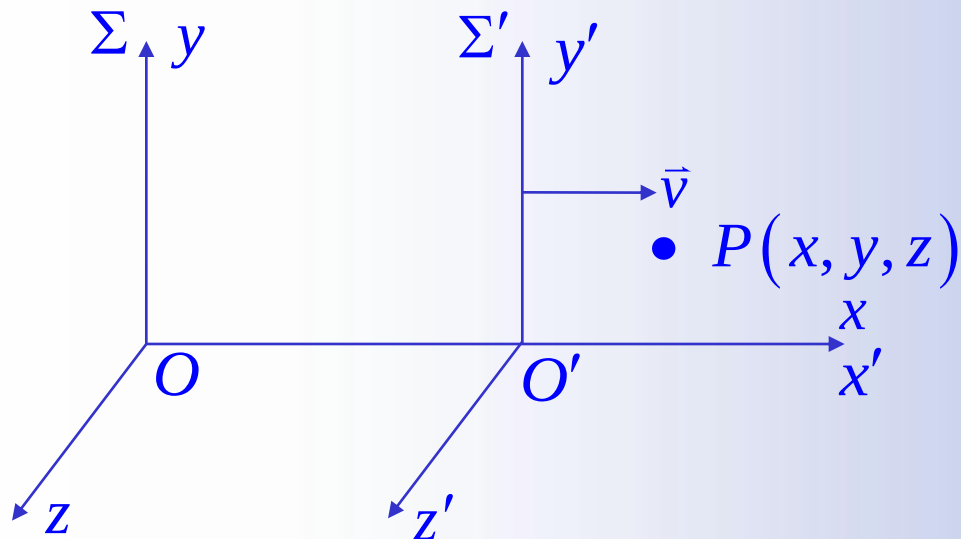
1、伽利略相对论原理

力学规律在一切作匀速运动的惯性参考系都是等效。

2、伽利略变换

设两个惯性系 Σ 和 Σ' ， Σ' 相对于 Σ 以速度 v 沿公共方向 x 轴运动，在 $t = t' = 0$ 时，两坐标系重合，现在要研究静止在 Σ 系和 Σ' 系中的两个观察者在同一时刻测得质点 P 在某一时刻位置间的关系。

伽利略变换
时间是绝对的;
长度是绝对的



$$\Sigma' \rightarrow \Sigma \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{or} \quad \Sigma \rightarrow \Sigma' \begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

伽利略速度变换

将上式微分即得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v \longrightarrow u = u' + v \quad \text{速度叠加原理}$$

加速度: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}$

牛顿第二定律在任何惯性系均成立: $f = m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d^2x'}{dt'^2}$

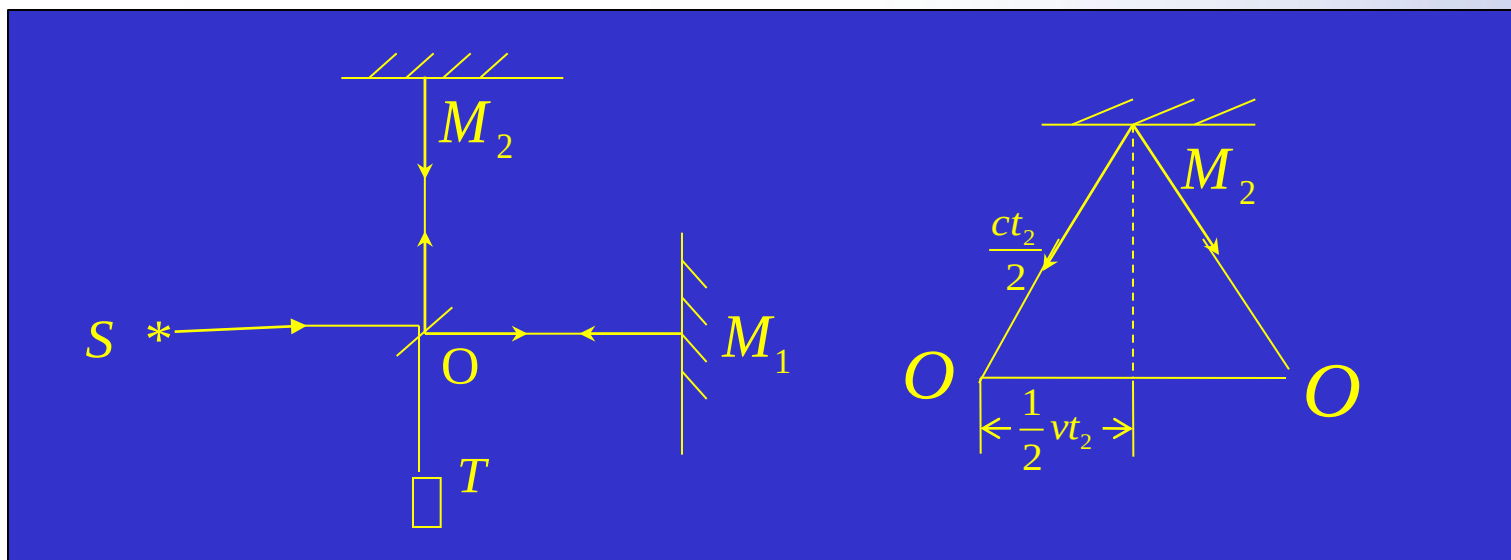
二、相对论实验基础

另外一个重要的物理问题就是电磁波的传播速度（也就是光速），是否符合伽利略变换？或者说光速满不满足速到叠加原理？

旧时空中，人们认识的波通常是机械波，其传播是依赖于媒质的。传播速度正比于 $(k/m)^{1/2}$ 的。所以大家很自然的设想电磁波也应该依赖媒质传播。由于光速非常大，那么这种媒质应该是一种刚性极强，又非常稀疏的介质，大家称作“以太”！

1、迈克尔逊—莫雷实验

—————→ 地球运动方向



① OM_1O

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\textcircled{2} \quad OM_2O \quad \left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2$$

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{v}{c} \ll 1} \Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\text{把仪器转动 } 90^\circ \quad \Delta t' = -\frac{l}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

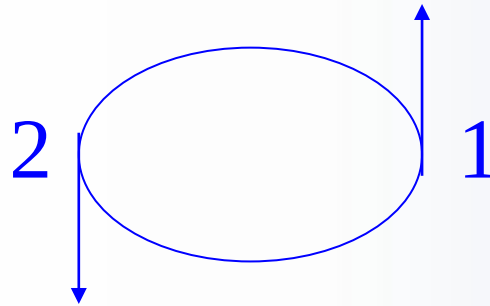
$$\text{改变量: } \delta = \Delta t - \Delta t' = \frac{2l}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\text{条纹移动的总数} \quad \Delta N = \frac{\delta}{T} = \frac{2l}{cT} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$$

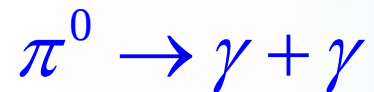
$$l \sim 11m \quad \lambda \sim 5 \times 10^{-7} m \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-8} \quad \boxed{\Delta N \sim 0.4}$$

迈克尔孙实验否定了特殊参考系的存在，它表明了光速不依赖于观察者所在的参考系。

2、双星实验证明了光速与光源无关



3、高速运动粒子实验也证明了光速与光源无关



4、其它...

到目前为止，所有实验都证明光速不依赖观察者所在的参考系，而且与光源速度无关。

结论：光速不变

6.2 相对论的基本原理

洛仑兹变换

1、狭义相对论的基本原理

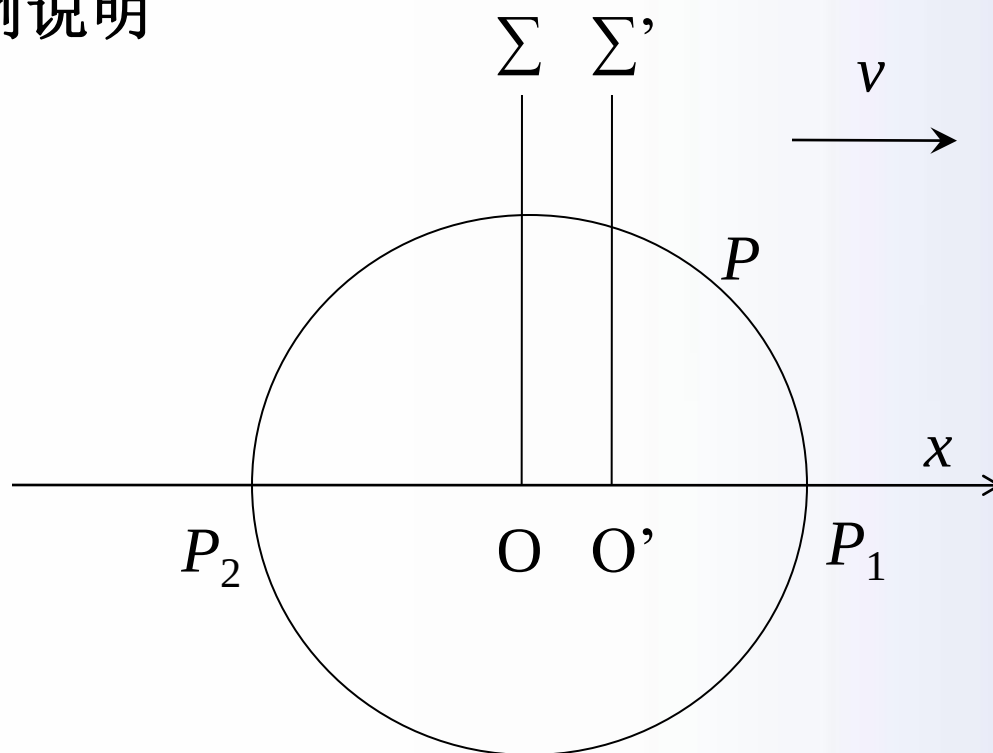
根据实验事实， Albert Einstein提出了如下两条基本假设：

a) 一切物理规律，无论是力学的，还是电磁学的，对于所有惯性系都具有相同的数学形式，这就是相对性原理。

b) 在所有惯性系中，真空中的光速在任何方向上都恒为 c ，并与光源的运动无关，这就是光速不变原理。

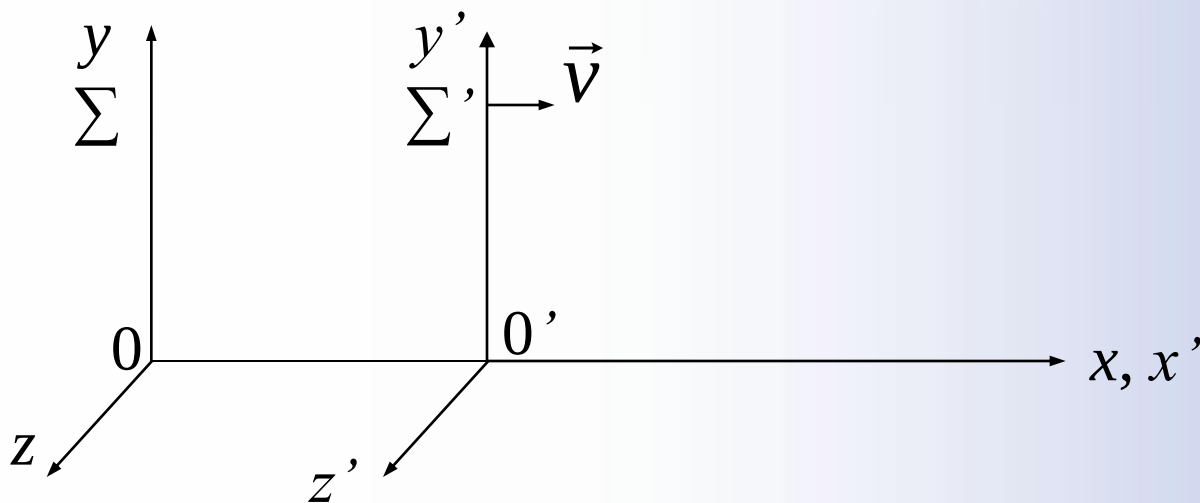
相对论的基本假设是与旧时空观矛盾的

举例说明



2、间隔不变性 (interval invariance)

若有两个惯性参考系 Σ 和 Σ' ， Σ' 相对于 Σ 沿 x 轴正向以匀速 $\vec{v}$ 运动，把两个坐标完全重合的时刻选作两个坐标系时间 t 和 t' 的起算点。



当 Σ' 和 Σ 的坐标原点 $0'$ ， 0 重合时（ $t=t'=0$ ）发出一光脉冲，根据光速不变原理，在 Σ 系观察者看来，任何时间 t 光的波前皆为一球面，即

$$r^2 = c^2 t^2$$

也就是：

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

而在 Σ' 系观察者看来，因为光脉冲也是在 Σ' 系的原点 $0'$ 发出，根据光速不变原理，任何时刻 t' 光的波前同样是球面，即

$$r'^2 = c'^2 t'^2$$

或者

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

因为时间和空间是均匀的，而且空间是各向同性的，这就意味着 Σ 系和 Σ' 系之间的时空变换必须是线性的。通过线性变换可知：对于以光信号联系的两事件上的两个二次式，从两个惯性系观察都等于零，因此必然相等。即

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

对于不以光信号联系的其他事件，从两惯性系观察，它们虽然不等于零，但由于时空坐标变换是线性的。这两个二次式至多只能相差一个系数A。

即

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = A(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)$$

其中系数A仅与两个惯性系的相对速度的绝对值有关，系数A不可能与坐标或时间有关。否则空间的不同点及时间的不同时刻就不等价了，这与时间，空间的均匀性相矛盾。另外，系数A也不可能与惯性系的相对速度的方向有关。因为这与空间的各向同性的性质相矛盾。由此可见

$$A = A(v)$$

由于 Σ' 系相对 Σ 系的运动速度显然与 Σ 系相对 Σ' 系的运动速度相同，因此

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2)$$

从以上两个式子可看出：

$$A^2 = 1, \quad \text{即 } A = \pm 1$$

为了从两个值 ± 1 中选择一个，我们应注意： A 只可以永远等于 $+1$ ，或永远等于 -1 ，假如 $A(v)$ 真的对于某些速度为 $+1$ ，而对于另外某些速度为 -1 ，那么，就一定有些速度存在，与这些速度相应的 $A(v)$ 是在 $+1$ 与 -1 之间，而这是不可能的，既然如此， $A(v)$ 要么只取 $+1$ ，要么只取 -1 ，最后，我们取 $A(v)$ 应该永远为 $+1$ ，这是因为恒等式

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

是变换式

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2)$$

的一个特殊例子，可见其中 $A(v) = +1$ 。

假如 x_1, y_1, z_1, t_1 及 x_2, y_2, z_2, t_2 是 Σ 系任何两个事件的坐标，则

$$S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

称为这两个事件的间隔。

同理，在 Σ' 系中任何两个事件的间隔为：

$$S'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

由上述比例关系式得到

$$S'^2 = S^2$$

这就是间隔不变式。

如果两事件彼此无限地接近，那么间隔为：

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

也可得到

$$dS'^2 = dS^2$$

因此，我们得到一个很重要的结论：两个事件的间隔在所有惯性系里都是一样的，即当由一个惯性系变换到任何另一惯性系时，它是不变的。这就是间隔不变性也是光速不变的数学表示。

3、闵可夫斯基空间(Minkowski Space)

由间隔不变性可知：

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \\ = \text{invariant}$$

令 $x_4 = ict \quad (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$

根据**Albert Einstein**求和法则，且有

$$x_u x_u = \text{inv.} \quad (u = 1, 2, 3, 4)$$

或者

$$x'_u x'_u = \text{inv.}$$

如果把 x_1, x_2, x_3, x_4 看作一个四维空间坐标矢量的四个分量，那么间隔不变性意味着 Σ 系与 Σ' 系之间的变换是一个由线性变换式

$$x'_u = a_{uv} x_v$$

所表征的四维空间旋转操作，通常把由这个 x_1, x_2, x_3, x_4 所组成的空间叫做闵可夫斯基空间。

4、洛伦兹变换 (Lorentz Transformation)

这里讨论闵可夫斯基空间的坐标变换的具体形式。因为要求在坐标变换下不改变闵可夫斯基空间的矢量长度，根据间隔不变性和变换式，我们看到：

$$x_u x_u = \text{inv.}$$

及

$$x'_u = a_{uv} x_v$$

可见变换系数 a_{uv} 服从下列 正交条件:

$$a_{uv} a_{u\sigma} = \delta_{v\sigma}$$

下面具体地确定变换系数，为了方便计算，我们把 $x'_u = a_{uv} x_v$ 写成如下形式:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

选择坐标系的相对运动方向沿着x方向，变换关系可以简化成

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}ct \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = a_{21}x + a_{22}ct \end{cases}$$

由于x轴与x'轴同向，时间t和t'正向相同，
则

$$a_{11} > 0, a_{22} > 0$$

再代入 $S^2 = S'^2$ ，则得

$$(a_{11}x + a_{12}ct)^2 + y^2 + z^2 - (a_{21}x + a_{22}ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1 & \text{①} \\ a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0 & \text{②} \\ a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1 & \text{③} \end{cases}$$

在 Σ' 系上看, O' 点坐标 $x' = 0$ 而从 Σ 系上看, 这一点坐标为 $x = vt$ 代入 (1) 式得

$$0 = a_{11}vt + a_{12}ct \quad \longrightarrow \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{v}{c} \quad (4)$$

联立①和④ 得:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$a_{12} = a_{21} = -\frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

这样我们就得到Lorentz变换式

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{array} \right.$$

式中取:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

根据 $x'_u = a_{uv}x_v$, 写成矩阵形式, 即为:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

类似地，如果把该式中的 v 改成 $-v$ ，就可得到逆变换的关系式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

Lorentz变换表明：

a) 空间和时间是统一的，时空的度量与物质运动密不可分。

b) 如果对Lorentz变换式中把 c 看成无穷大，即 $c \rightarrow \infty$ ，则变换式立即成为：

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

所以说伽利略变换是洛仑兹变换在低速运动下的一个近似。

c) 以上所得到的洛仑兹变换式，是在一种特殊的运动条件下所构成的时空变换关系，即 Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 正方向运动，而且 x' 与 x 平行，如果 Σ' 系相对于 Σ 系不是沿 x 正方向运动，那么以上洛仑兹变换式不能适用。

6.2 相对论的时空理论

1、相对论时空结构

以第一个事件为空时原点(0,0,0,0)，设第二个事件的空时坐标为(x,y,z,t)，这两个事件的间隔为：

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - r^2$$

式中 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 为两事件的空间距离。

对于任意两个事件，间隔并不一定为零。因此，可以把间隔分成三类：

(1) 若两事件可以用电磁信号（光波）联系，此时， $r = ct$ ，故 $S^2 = 0$ ；

(2) 若两个事件可以用低于电磁信号传播的作

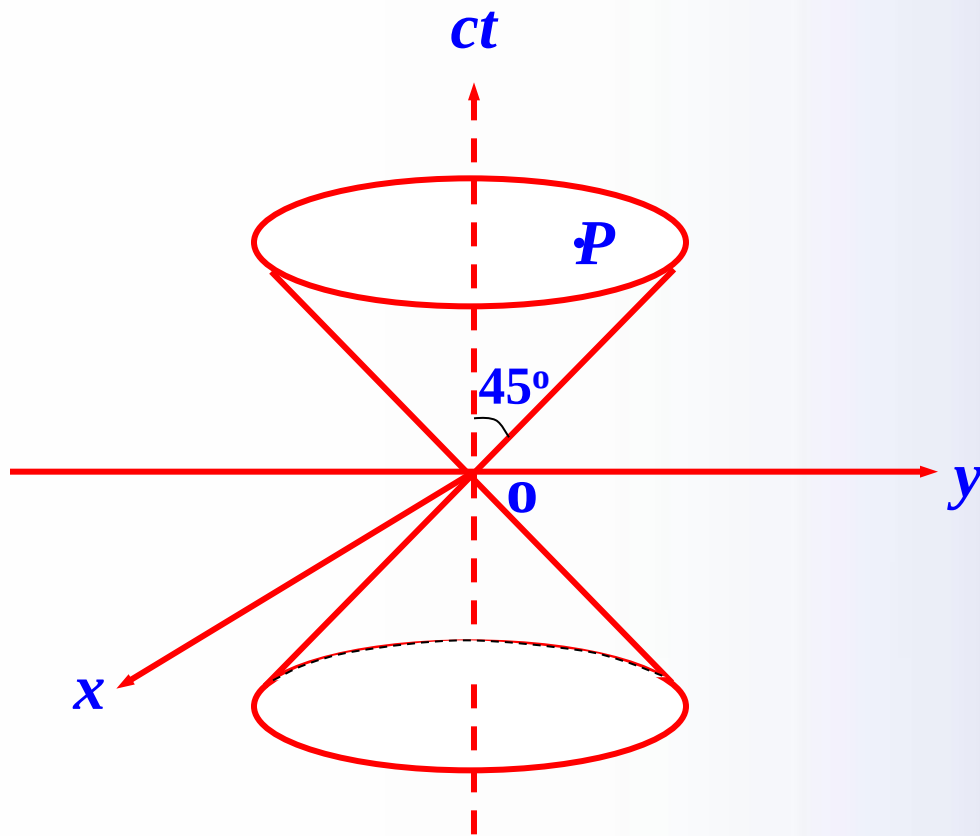
用来联系，此时

$$r < ct, \text{ 故 } S^2 > 0 ;$$

(3) 若两个事件的空间距离超过了光波在时间 t 所传播的距离，此时

$$r > ct, \text{ 故 } S^2 < 0 ;$$

为了说明问题的方便，把三种间隔用一个三维时空图形表示出来，事件用一个三维时空点 P 来表示。



概括起来，事件 P 相对于事件 0 的时空关系可作如下的绝对分类：

(1) 类时间隔 $S^2 > 0$

a) 绝对将来，即 P 在 0 的上半光锥内。

b) 绝对过去，即 P 在 0 的下半光锥内。

(2) 类光间隔 $S^2 = 0$

P 点在光锥面上。

(3) 类空间隔 $S^2 < 0$

P 与 0 绝对远离， P 点在光锥之外。

2、因果律

如果两事件 $P_1(x_1, t_1)$ 和 $P_2(x_2, t_2)$ 有**因果关系**，就是指 P_1 是 P_2 的“**原因**”， P_1 的效应通过讯号或者扰动传达到 P_2 ， P_2 是 P_1 的“**结果**”，反之亦然。

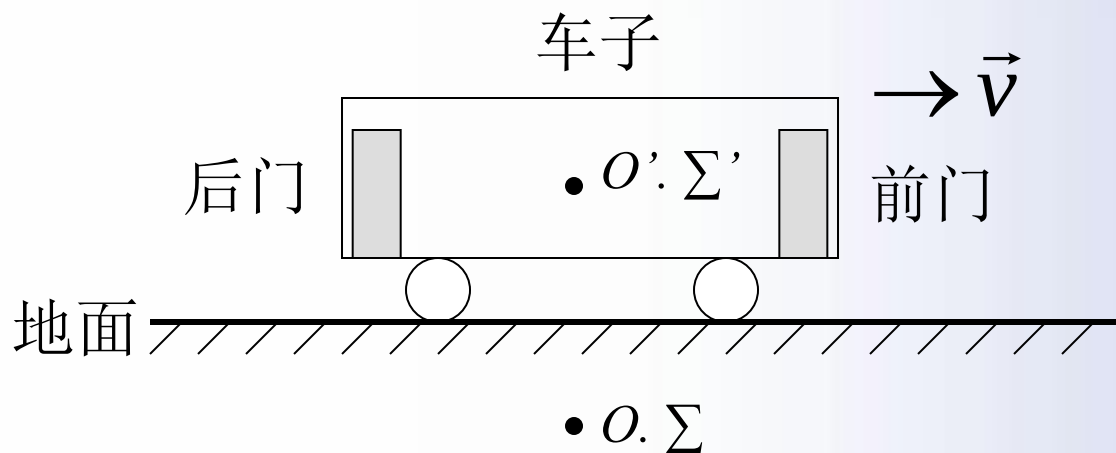
举例说明

结论：因果事件先后秩序的绝对性对相对论理论的要求是：所有物体运动的速度、信号传播的速度及作用传递的速度等都不能超过光速 c 。

3、同时的相对性

定性描述：

一个作匀速运动的车子，其前后两门皆用光信号控制其开和关。



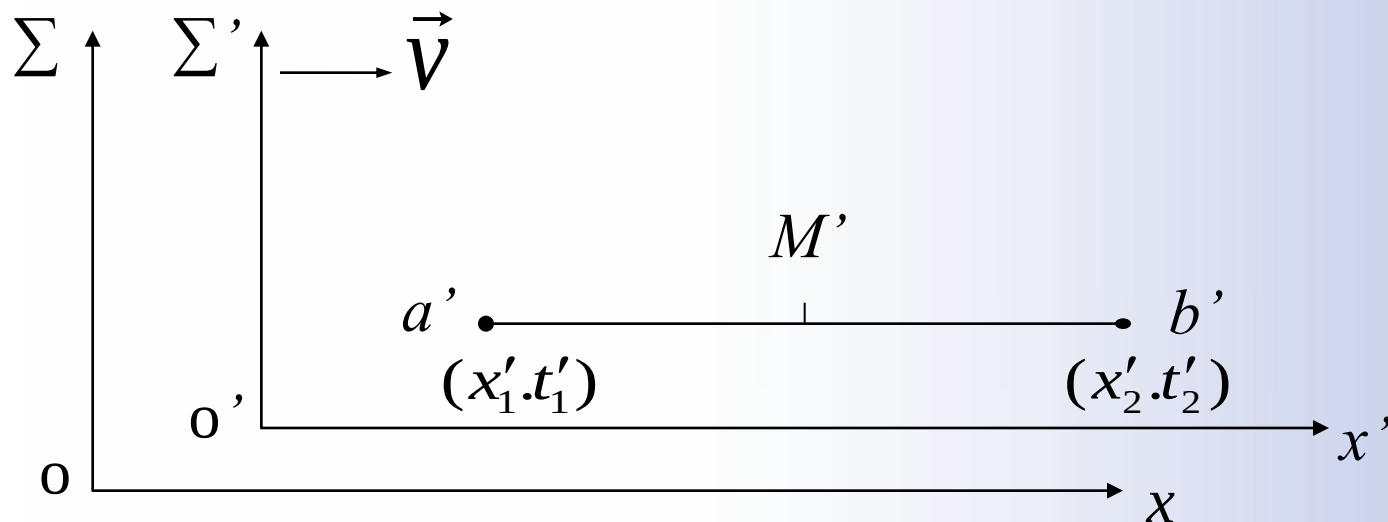
在车厢中 o' 与地面上 o 点相遇时发一光信号，在与车厢相对静止的 Σ' 系中的观察者看来，由光速不变原理，光信号必然同时到达前、后门，所以看到的是前、后门同时开启。

但 Σ 系观察者看来，因光往前、往后的传播速度都是 c （光速不变原理），而前、后门又都以速度 $\vec{v}$ 前进，所以从 Σ 系看到的是光信号相对于后门的传播速度是 $(c+v)$ ，相对于前门的传播速度是 $(c-v)$ ，因此后门先开、前门后开。

开门是一个事件，开前门与开后门则是两个事件，从 Σ' 系看来，这两个事件是同时事件；从 Σ 系看来，这两个事件是不同同时事件。这就是同

时的相对性。

定量描述：



一物体 $a'b'$ 随 Σ' 系一起运动， M' 处于 $a'b'$ 的中点上，在 M' 点发一光脉冲，在 Σ' 系看来，光信号将同时到达 a' 和 b' ，这两个事件以 (x'_1, t'_1) 及 (x'_2, t'_2)

表示，那么在 Σ 系中，是否也观察到光信号同时到达 a', b' 呢？

根据Lorentz变换式：

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(t'_1 + \frac{\beta}{c} x'_1 \right)$$

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(t'_2 + \frac{\beta}{c} x'_2 \right)$$

两式相减，得到：

$$\begin{aligned}t_2 - t_1 &= \gamma \left[(t'_2 - t'_1) + \frac{\beta}{c} (x'_2 - x'_1) \right] \\&= \gamma \left[0 + \frac{\beta}{c} l' \right] \\&= \gamma \frac{\beta}{c} l'\end{aligned}$$

由于 $\gamma \frac{\beta}{c} l' > 0$ ， 因此 $t_2 > t_1$.

这就说明：在 Σ 系看来，信号不是同时到达 a' 。

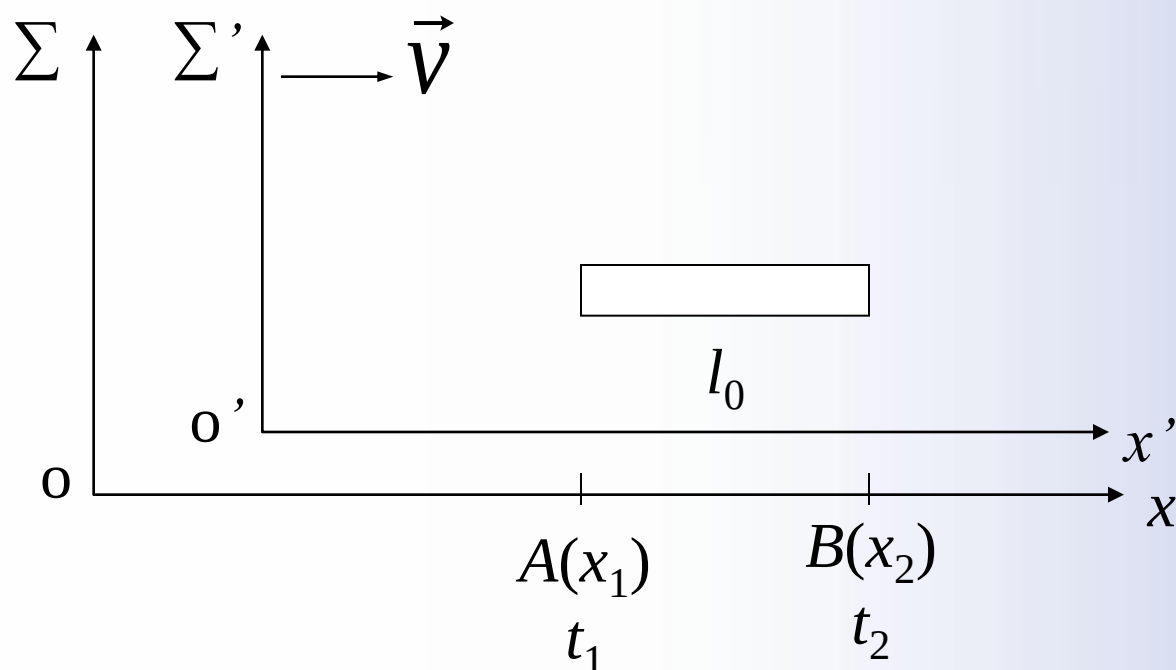
和 b' 点的， t_2 的读数大于 t_1 的读数，即 t_1 时刻在先， t_2 时刻在后，即信号是先到 a' 点，后到 b' 点。

由此得到结论：若两个事件在某一参考系中为同时异地事件，那么根据Lorentz变换式，在其他参考系中这两个事件就不是同时的。这就是同时的相对性。

4、运动尺度的缩短—空间距离的相对性

测量物体的长度往往就是用一根尺子去和物体比较，看物体的两端与尺子上哪两点重合，关键在于必须对其物体的两个端点进行同时测量。测量物体每一端的坐标都是一个事件，同时测量意味着是同时事件。

设在 Σ' 系内有一根平行 x' 轴的静止的杆，在 Σ' 系的观察者观测，杆的后端坐标为 x'_1 ，前端坐标为 x'_2 ，杆相对于 Σ' 系的观察者没有运动。因此， Σ' 系的观察者测得杆长为 $l_0 = x'_2 - x'_1$



在 Σ 系测量，杆后端在 t_1 时刻与x轴上的A点重合，A点的坐标为 x_1 ，前端在 t_2 时刻与x轴上的B点重合，B点的坐标为 x_2 ，由于测量是同时的，则 Σ 系观察者观测到杆的两端与x轴的A、B两点重合是同时的，即 $t_1=t_2$ 。测杆的长为

$$l = \overline{AB} = x_2 - x_1$$

根据 Lorentz变换式可得：

变换坐标说明
相对性

$$l_0 = \gamma l = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

5、运动时钟的延缓—时间间隔的相对性

现在来讨论：在不同的惯性系中观察同一物质运动过程所经历的时间，其结果是否相同？

设在 Σ' 系中有一静止时钟，在 Σ' 系内的同一地点每隔 $\Delta t'$ 时间发出一光信号，即

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = t'_3 - t'_2 = \cdots$$

这些信号的时间间隔在 Σ 系看来则为：

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

运动尺度的缩短和时间延缓也是相关的

实例： μ 介子，以接近光速穿过大气层

其寿命为： $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$

飞过的路程： $l_0 \approx 2.2 \times 10^{-6} c = 660 \text{ m}$

但是，按照 $v \approx 0.97c$ 计算，它的寿

命变为 $\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 10^{-5} \text{ s}$

按此寿命，它行进的路程为： $l \approx 10^{-5} c = 3000 \text{ m}$

我们认为介子寿命变长，介子认为大气层变薄！

6、速度和加速度变换式

(1) 这里，我们要找出某个粒子在一个参考系内的速度与在另一个参考系内的速度之间的变换关系。

假定 Σ' 系相对于 Σ 系以速度 v 沿着 x 轴正方向运动，设粒子相对于 Σ 系、 Σ' 系的速度分别为

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right)$$

利用Lorentz变换以及其变换是线性的性质，微分得到

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

用 dt' 去除 dx' , dy' , dz' , 则得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad \text{即} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{1 - \beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{\frac{dy}{dt} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \quad \text{即} \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dz}{dt}\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

即

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \end{array} \right. \xrightarrow[v \rightarrow -v]{\text{逆变换}} \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \end{array} \right.$$

(3) 我们还可推出两个惯性系之间物体加速度的变换关系，即

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_x = \frac{du'_x}{dt'} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\frac{vu_x}{c^2})^3} a_x \\ a'_y = \frac{du'_y}{dt'} = \frac{(1-\beta^2)}{(1-\frac{vu_x}{c^2})^2} (a_y + \frac{vu_y}{c^2 - vu_x} a_x) \\ a'_z = \frac{du'_z}{dt'} = \frac{(1-\beta^2)}{(1-\frac{vu_x}{c^2})^2} (a_z + \frac{vu_z}{c^2 - vu_x} a_x) \end{array} \right.$$

第二讲

相对论力学和电动力学

Relativistic Mechanics and Electrodynamics

6.3 相对论理论的四维形式

1、洛伦兹变换的四维形式

洛伦兹变换形式为

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$y' = y, \quad z' = z$$

闵可夫斯基四维坐标
(x, y, z, ict)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

令 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$,
则上式可写为

$$x'_\mu = a_{\mu\gamma} x_\gamma$$

洛伦兹变换

$$\text{其中 } x'_\mu = a_{\mu\gamma} x_\gamma \equiv \sum_{\gamma} a_{\mu\gamma} x_\gamma = a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + a_{\mu 3} x_3 + a_{\mu 4} x_4$$

$$\text{令: } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix}$$

矩阵**A**为洛伦兹变换矩阵

A的转置是**A**的逆矩阵 $\tilde{A} = A^{-1}$ 或 $\tilde{A}A = I$, I 为单位矩阵

$$a_{\mu\lambda} a_{\mu\gamma} = \delta_{\lambda\gamma} \quad \delta_{\lambda\gamma} = \begin{cases} 1, \lambda = \gamma \\ 0, \lambda \neq \gamma \end{cases} \quad \text{克罗内克尔符号}$$

A是正交矩阵,洛伦兹变换是正交变换

洛伦兹变换的反变换

$$\left. \begin{aligned} x'_\mu &= a_{\mu\gamma} x_\gamma \\ a_{\mu\lambda} a_{\mu\gamma} &= \delta_{\lambda\gamma} \end{aligned} \right\} \quad a_{\mu\lambda} x'_\mu = x_\lambda$$

例1.利用洛伦兹变换证明间隔不变性。

证明：

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_\lambda x_\lambda$$

同理： $S'^2 = x'_\mu x'_\mu$

$$\text{有 } x'_\mu x'_\mu = a_{\mu\gamma} x_\gamma a_{\mu\lambda} x_\lambda = \delta_{\lambda\gamma} x_\gamma x_\lambda = x_\lambda x_\lambda$$

即 $S'^2 = S^2$, 可见间隔在洛伦兹变换下是不变的。

2、物理量按洛伦兹变换性质分类

(1) 标量 物理量在洛伦兹变换下不变的量

例：间隔 $S^2 = x_\mu x_\mu$, $dS^2 = dx_\mu dx_\mu$ 为标量

(2) 矢量 与坐标有同样变换关系的量

$$g'_\mu = a_{\mu\gamma} g_\gamma$$

(3) 张量 张量的变换关系为 $T'_{\mu\gamma} = a_{\mu\lambda} a_{\gamma\rho} T_{\lambda\rho}$

变换：偏导运算变换 $\frac{\partial}{\partial x'_\mu}$

达朗贝尔算符 $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2}$

四维速度矢量 U_μ $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_u$$

$$U_\mu = \gamma_\mu (u_1, u_2, u_3, ic)$$

四维速度分量

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = u_\mu \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_u u_\mu$$

其中 $u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}$, ($\mu=1, 2, 3$) 为通常意义下的速度

参考系变换时, $U'_\mu = a_{\mu\gamma} U_\gamma$

3、多普勒效应与光行差公式

(1) 四维波矢量 四维相位 ϕ

四维相位 $\phi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ 是标量



$$k_\mu = (k_1, k_2, k_3, \frac{i\omega}{c}) = (\vec{k}, \frac{i\omega}{c})$$

满足洛伦兹变换 $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

(2) 多普勒效应 推导

$$\omega' = \omega \gamma (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$$

$$\Sigma \rightarrow \omega, \mathbf{k}$$



$$\Sigma' \rightarrow \omega', \mathbf{k}'$$

若 Σ' 为光源的静止参照系，则 $\omega' = \omega_0$, ω_0 为静止光源的辐射角频率。

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)} = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)}$$

相对论的多普勒效应公式

当 $v \ll c$ 则

$$\omega \approx \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \quad \text{经典多普勒效应公式}$$

若迎着光源运动方向观察辐射, 由于 $\theta = 0$ 则

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad \text{显然 } \omega > \omega_0 \ (v \ll c)$$

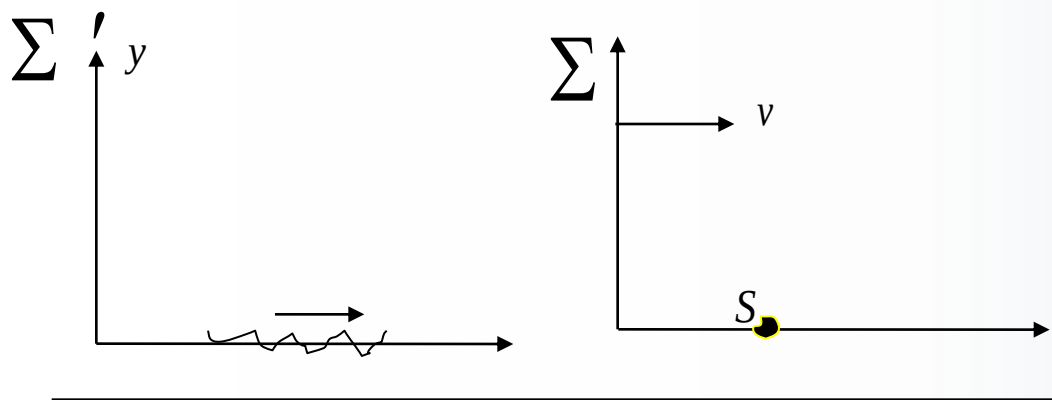
这种现象称为纵向多普勒效应

若在垂直于光源运动方向观察, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 则

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad \text{显然 } \omega < \omega_0 \ (v \ll c)$$

这种现象称为横向多普勒效应

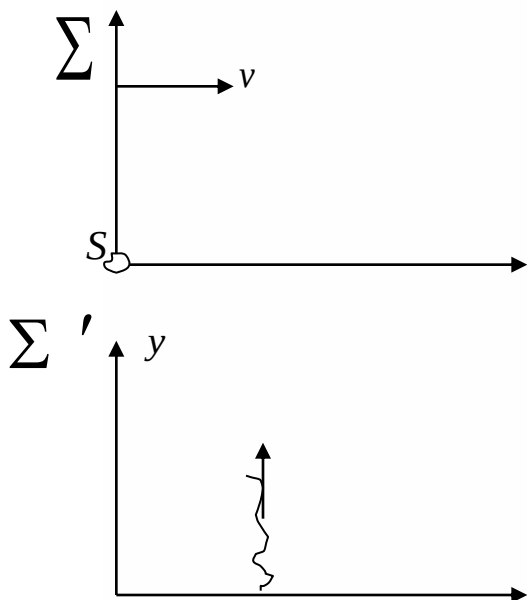
纵向多普勒效应



当 $\theta = 0^\circ$

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} > \omega_0$$

横向多普勒效应

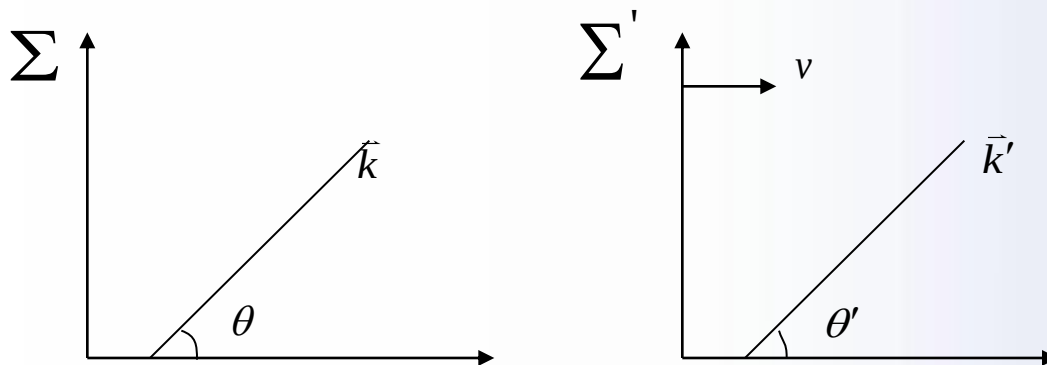


当 $\theta = 90^\circ$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} < \omega_0$$

(3) 光行差公式

光行差代表在不同的参考系观察光的传播方向之间的关系。



$$\left. \begin{aligned} k'_1 &= a_{11}k_1 + a_{14}k_4 = \gamma \left(k_1 - \frac{v\omega}{c^2} \right) \\ k_1 &= k \cos \theta = \frac{\omega}{c} \cos \theta \\ k'_1 &= \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \end{aligned} \right\} \frac{\omega'}{c} \cos \theta' = \gamma \left(\frac{\omega}{c} \cos \theta - \frac{v\omega}{c^2} \right)$$

即: $\omega' \cos \theta' = \gamma \left(\cos \theta - \frac{v}{c} \right) \omega$

$$k'_2 = k_2 \quad (\mu = 2)$$

$$k'_3 = k_3 \quad (\mu = 3)$$

$$\omega' = \omega \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \quad (\mu = 4)$$

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}$$

光行差公式

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(\cos \theta - \frac{v}{c} \right)}$$

还可以通过速度变换公式求得

4、物理规律的协变性

相对论原理要求一切惯性参考系都是等价的。在不同惯性系，物理规律应该表现为相同的形式，即物理规律的协变性。

例如在

$$\Sigma \text{系中} \quad F_{\mu} = G_{\mu}$$

$$\Sigma \rightarrow \Sigma' \quad F'_{\mu} = a_{\mu\nu} F_{\nu} = a_{\mu\nu} G_{\nu} = G'_{\mu}$$

$$\Sigma' \text{系} \quad F'_{\mu} = G'_{\mu}$$

协变性

6.3 电动力学理论的协变性

1、四维电流矢量与连续性方程的协变性

(1) 四维电流密度矢量

$$U_\mu = \gamma_u (\vec{u}, ic)$$
$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \longrightarrow j_\mu = \rho_0 U_\mu$$

ρ_0 为标量, 静止电荷密度

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{j} = \frac{\rho_0 \vec{u}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \rho \vec{u} \\ j_4 = ic \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = ic \rho \end{array} \right. \longrightarrow j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$$


 $\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$
 运动电荷电量

这说明电流密度和电荷密度是个统一物理量。

在 Σ' 系里观察，电荷静止，只有电荷密度 ρ_0 ；
在 Σ 系观察，电荷运动，既有电荷密度 ρ 又有
电流密度 $\vec{j}$ 。

(2) 连续性方程的协变性

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \xrightarrow[\substack{j'_\mu = a_{\mu\gamma} j_\gamma \\ x_\mu = (\bar{x}, ict)}]{\text{}} \boxed{\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0}$$

2、四维势矢量和达朗贝尔方程的协变性

达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \bar{j}$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\square} \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\square \bar{A} = -\mu_0 \bar{j}$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

洛伦兹条件 $\nabla \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

引入 A_4

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \xrightarrow{\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}} = -\mu_0 c^2 \rho \xrightarrow{j_\mu = (\bar{j}, ic\rho)} \square \frac{i\varphi}{c} = -\mu_0 j_4$$

定义 $A_4 = \frac{i\varphi}{c}$ 则

$$\square A_\mu = -\mu_0 j_\mu$$

$$A_\mu = (\bar{A}, \frac{i}{c} \varphi)$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

四维矢量

$$\begin{aligned}x_\mu &= (\bar{x}, ict) & k_\mu &= (\vec{k}, \frac{i\omega}{c}) & U_\mu &= \gamma_\mu (\vec{u}, ic) \\j_\mu &= (\vec{j}, ic\rho) & A_\mu &= (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)\end{aligned}$$

矢量变换为

$$g'_\mu = a_{\mu\nu} g_\nu$$

$$(a_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

3、电磁张量和麦克斯韦方程的协变性

在电磁场中矢量 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 可以由矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 得到

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

其分量为

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$E_1 = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right)$$

$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$$E_2 = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right)$$

$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

$$E_3 = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right)$$

引入一个四维张量

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{-i}{c} E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{-i}{c} E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{-i}{c} E_3 \\ \frac{i}{c} E_1 & \frac{i}{c} E_2 & \frac{i}{c} E_3 & 0 \end{bmatrix}$$

电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 是张量的不同分量

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \mu=4 \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \mu=1,2,3 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$$

推导

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & (1, 2, 3) \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2, 3, 4)(3, 4, 1)(4, 1, 2) \end{aligned} \right\} \boxed{\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0}$$

对于 $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 j_\mu$ 推导

当 $\mu = 4$

$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} = \mu_0 j_4$$

$$\frac{\partial \frac{i}{c} E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \frac{i}{c} E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \frac{i}{c} E_3}{\partial x_3} = \mu_0 i c \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

当 $\mu = 1$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \mu_0 j_1$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} - \frac{\frac{i}{c} \partial E_1}{i c \partial t} = \mu_0 j_1$$

$$(\nabla \times \vec{B})_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} = \mu_0 j_1$$

$$\text{对于 } \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

当 μ, ν, λ 为1,2,3

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0$$

即: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

张量变换:

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} F_{\lambda\rho}$$

当 μ, ν, λ 为2,3,4

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{-\frac{i}{c} \partial E_3}{\partial x_2} + \frac{\frac{i}{c} \partial E_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0$$

即: $(\nabla \times \vec{E})_1 = -\frac{\partial B_1}{\partial t}$

电磁场变换规律

电磁场变换规律

$$\begin{aligned}
 E \quad F'_{41} &= a_{41}a_{14}F_{14} + a_{44}a_{11}F_{41}, & \rightarrow E'_x &= E_x \\
 F'_{42} &= a_{41}a_{22}F_{12} + a_{44}a_{22}F_{42}, = \frac{F_{42} - i\beta F_{12}}{\sqrt{1-\beta^2}} & \rightarrow E'_y \\
 F'_{43} &= a_{41}a_{33}F_{12} + a_{44}a_{33}F_{43}, = \frac{F_{43} - i\beta F_{13}}{\sqrt{1-\beta^2}} & \rightarrow E'_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B \quad F'_{23} &= a_{22}a_{33}F_{23} & B'_1 &= B_1 \rightarrow B_x \\
 F'_{12} &= a_{11}a_{22}F_{12} + a_{14}a_{22}F_{42}, = \frac{F_{12} + i\beta F_{42}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
 F'_{31} &= a_{33}a_{11}F_{31} + a_{33}a_{14}F_{34}, = \frac{F_{31} + i\beta F_{34}}{\sqrt{1-\beta^2}}
 \end{aligned}$$

$$E'_1 = E_1$$

$$B'_1 = B_1$$

$$E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3)$$

$$B'_2 = \gamma(B_2 + \frac{v}{c^2} E_3)$$

$$E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2)$$

$$B'_3 = \gamma(B_3 - \frac{v}{c^2} E_2)$$

$\vec{E}, \vec{B}$ 是统一的物理量，在一个惯性系中，若只有静止的电场 $\vec{E}$ ，则另一个相对运动的惯性系中，则 $\vec{E}, \vec{B}$ 同时存在。

上式可以写成更紧凑的形式

$$E'_{//} = E_{//}$$

$$B'_{//} = B_{//}$$

$$E'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}$$

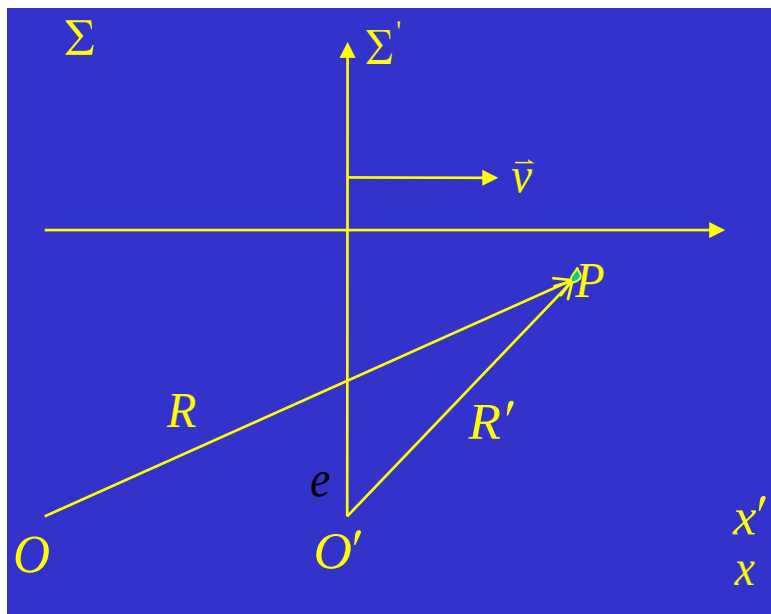
$$B'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp}$$

$$v \ll c$$



$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$$

例1



解：在 Σ' 系中，粒子静止

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R'} \quad \vec{A}' = 0$$

利用反变换关系

$$A_\mu = a_{\mu\gamma} A'_\gamma \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \frac{i\varphi}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{i}{c}\varphi' \end{pmatrix}$$

$$A_1 = a_{11}A_1' + a_{41}A_4' = -i\beta\gamma \frac{i\phi'}{c} = \frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R'} \quad (1)$$

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

$$A_4 = \gamma A_4' \Rightarrow \phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{e}{R'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ 是 Σ' 系的距离，可以用 Σ 系中的距离 R 代替。

由于洛伦兹收缩 $x = x' \sqrt{1-\beta^2} \quad y' = y, \quad z' = z$

$$\Rightarrow R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\frac{x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \sqrt{R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v})^2}{c^2}}$$

代入 (1) 得:

$$A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{\sqrt{R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v})^2}{c^2}}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v})^2}{c^2}}}$$

其中 $\vec{x}$ 是 P 点在 Σ 系的坐标矢量,

$R = |\vec{x}|$ 是原点到 P 点的距离,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

6.6 相对论动力学

1、四维动量矢量

固有时间间隔

固有长度间隔

四维速度
矢量

$$U_\mu = \gamma_u (\vec{u}, ic) \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动
量矢量

$$\vec{P} = m_0 U_\mu \quad P_\mu = \left(\vec{P}, \frac{iW}{c} \right) \quad m_0 \text{是静止质量}$$

空间分量

$$\vec{P} = m_0 \gamma_u \vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \xrightarrow{u \ll c} \vec{P} = m_0 \vec{u} \quad \text{经典动量}$$

$$P_4 = m_0 i \gamma_\mu c = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{iW}{c} \quad \text{这里 } W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

是相对论中的能量

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots$$

$$\Rightarrow W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \dots$$

定义静止能量

$$W_0 = m_0 c^2$$

由此可见，相对论能量**W**不仅包括物体的动能**T**还包括静止能量 **$W_0=mc^2$** ，物体静止时仍然有能量。能量守恒定律——利用原子能的理论根据。

物体的动能为 $T = W - W_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2$

四维动量 $P_\mu = \left(\bar{P}, \frac{iW}{c} \right)$

P_μ 可构成不变量, $P_\mu P_\mu = \bar{P}^2 - \frac{W^2}{c^2} = \text{不变量}$

在物体静止内, $\bar{P} = 0$, $W = W_0 = m_0 c^2$, 因而不变量为 $-\frac{(m_0 c^2)^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$, 代入上式得 $\bar{P}^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2$, 则有

$$W = \sqrt{P^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

这是关于物体的能量、动量和质量的一重要公式。

2、质能关系

由相对论能量、动量表示为

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \text{ (质能关系式)}, \quad \vec{P} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

定义运动质量 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$, 则有 $W = mc^2$, $\vec{P} = m\vec{u}$

3、相对论力学方程

四维力矢量 $K_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau} = (\vec{K}, K_4)$

四维力矢量的空间分量 $\vec{K} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \frac{d\vec{P}}{\sqrt{1-\beta^2} dt}$

$$\vec{K}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \vec{P} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

定义力: $\vec{F} = \sqrt{1-\beta^2} \vec{K} = \sqrt{1-u^2/c^2} \vec{K}$

则得方程

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \vec{P} = m\vec{u}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

方程形式与牛顿方程一致。

K_4 的第四个分量

$$K_4 = \frac{dP_4}{d\tau} = \frac{i}{c} \frac{dW}{d\tau} = \frac{i}{c} \gamma_u \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \frac{m_0 \vec{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{u} &= \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \cdot \vec{u} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} + \frac{m_0 u^2}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\vec{u}}{c^2} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= \frac{m_0 \vec{u}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{dW}{dt} \end{aligned}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{dW}{dt}$$

相对论能量

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$K_4 = \frac{i}{c} \gamma_\mu \vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{i}{c} \vec{k} \cdot \vec{u}$$

$$\therefore K_\mu = (\vec{K}, \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{u})$$

相对论力学方程

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (\vec{P} = m\vec{u}) \quad \text{是相对论协变方程}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{dW}{dt} \quad (W = mc^2)$$

① 四维速度 $U_\mu = \gamma_u (\vec{u}, ic)$

② 四维动量 $P_\mu = \left(\vec{P}, \frac{iW}{c} \right)$

③ 四维力 $K_\mu = \left(\vec{K}, \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{u} \right) = \gamma_u \left(\vec{F}, \frac{i}{c} \vec{F} \cdot \vec{u} \right)$

洛伦兹力： $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$
 用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 和 U_ν 表示

$$K_\mu = eF_{\mu\nu}U_\nu$$

$$\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \vec{K}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= eF_{12}U_2 + eF_{13}U_3 + eF_{14}U_4 \\ &= eB_3\gamma\bar{u}_2 - eB_2\gamma\bar{u}_3 + e\left(\frac{-iE_1}{c}\right)\gamma ic \\ &= \gamma e(\bar{u} \times \vec{B})_1 + e\gamma E_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})_1 \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

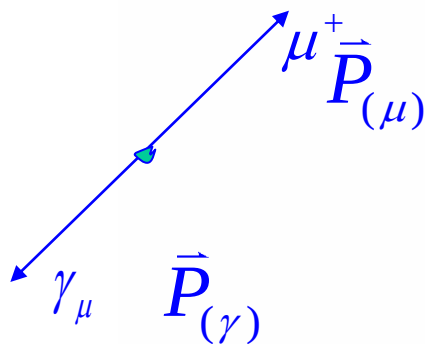
带电粒子在电磁场中的运动方程。

例. 带电 π 介子衰变为 μ 和中微子。

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \gamma_\mu \quad \text{各粒子静质量为}$$

$$m_\pi = 139.57 \text{ MeV} / c^2 \quad m_\mu = 105.66 \text{ MeV} / c^2 \quad m_\gamma = 0$$

求 π 介子质心系中 μ 子的动量、能量和速度。



$$\vec{P}_\pi = 0, W_\pi = m_\pi c^2$$

$$W_{(\mu)} = \sqrt{P_{(\mu)}^2 c^2 + m_\mu^2 c^4}$$

$$W_{(\gamma)} = P_{(\gamma)} c$$

由能量和动量守恒定律有

$$\vec{P}_{(\mu)} + \vec{P}_{(\gamma)} = 0 \quad (1), \quad \sqrt{P_{(\mu)}^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} + P_{(\gamma)} c = m_\pi c^2 \quad (2)$$

将(1) 代入 (2)得: $\sqrt{P^2c^2 + m_\mu^2c^4} = m_\pi c^2 - Pc$

$$\rightarrow \begin{cases} P_\mu = P_\nu = P = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c \\ W_\mu = m_\pi c^2 - Pc = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} P &= 29.79 \text{ MeV} / c \\ W_\mu &= 109.78 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W_\mu}{m_\mu c^2} = \frac{109.78}{105.66} \equiv 1.0390$$

$$\rightarrow v_\mu = 0.2714c$$

例3. 讨论带电粒子在均匀恒定常磁场中的运动。

$$\vec{F} = e\vec{u} \times \vec{B} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{u} \times \vec{B}$$

$$\frac{dW}{dt} = (e\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \text{常数} \rightarrow |\vec{u}| = \text{常数}$$

表示速度 $\vec{u}$ 方向会改变，但大小不变。

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{u} \times \vec{B}$$

$$\text{即: } \dot{\vec{u}} = \frac{e}{\gamma m_0} \vec{u} \times \vec{B} \quad (1)$$

$$\text{设: } \vec{B} = B\vec{e}_z \quad \vec{u} = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{B} = B(u_y\vec{e}_x - u_x\vec{e}_y) \quad (2)$$

将 (1) 代入 (2) 得:

$$\begin{aligned} \dot{u}_z = 0 &\Rightarrow u_z = \text{常数} \\ \text{令: } \omega = \frac{eB}{\gamma m_0} \end{aligned}$$

$$(1)(2) \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}_x = \omega u_y \\ \dot{u}_y = -\omega u_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = C \cos \omega t \\ u_y = -C \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u = \text{常数} &\Rightarrow u_{\perp} = C = \sqrt{u^2 - u_z^2} \\ u_z = \text{常数} &\Rightarrow u_x^2 + u_y^2 = u_{\perp}^2 = C^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u_x &= u_{\perp} \cos \omega t \\ u_y &= -u_{\perp} \sin \omega t \end{aligned}$$

若 $u_z = 0$ ，则粒子做匀速圆周运动，角频率

$$\omega = \frac{eB}{\gamma m_0}, \text{ 其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{圆半径 } a = \frac{u_{\perp}}{\omega} = \frac{\gamma m_0 u_{\perp}}{eB}$$

当 $u_z \neq 0$ 时，粒子做螺旋运动

当 $u \ll c$ 时 $\gamma \rightarrow 1$ ，则 $\omega = \frac{eB}{m_0}$ 与非相对论一致。

在非相对论情形， $\omega = \frac{eB}{m_0}$ 与粒子及速度无关。

在相对论情形， $\omega = \frac{eB}{\gamma m_0}$ 随粒子速度增大而减小，速度增大 γ 增大，

因此 ω 随粒子速度增大而减小。